



ÜNİTE IV.

DÜZLEMDE VEKTÖRLER

1. YÖNLÜ DOĞRU PARÇASI

- I. Yönlü Doğru Parçasının Tanımı
- II. Yönlü Doğru Parçasının Uzunluğu
- III. Yönlü Doğru Parçasının Taşıyıcısı
- IV. Sıfır Yönlü Doğru Parçası
- V. Paralel Yönlü Doğru Parçaları
- VI. Eş Yönlü Doğru Parçaları

2. VEKTÖRLER

- I. Vektörün Tanımı
- II. Sıfır Vektörü
- III. Ters (Zıt) Vektörler
- IV. Bir Vektörün Normu

3. VEKTÖRLER KÜMESİNDE İŞLEMLER

- I. Toplama İşlemi
- II. Vektörler Kümesi Toplama İşlemine Göre Değişmeli Bir Grup tur.
- III. İki Vektörün Farkı

4. BİR VEKTÖRÜN BİR REEL SAYI İLE ÇARPIMI

5. VEKTÖR BİLGİSİNİN GEOMETRİYE UYGULANMASI

6. ANALİTİK DÜZLEMDE VEKTÖRLER

- I. Yer Vektörü (Konum Vektörü)
- II. İki Vektörün Eşitliği
- III. Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)

7. ANALİTİK DÜZLEMDE VEKTÖRLERLE İLGİLİ İŞLEMLER

- I. İki Vektörün Toplamı
- II. İki Vektörün Farkı
- III. Bir Vektörün Bir Reel Sayı ile Çarpımı

8. İKİ VEKTÖRÜN PARALELLİĞİ

9. İKİ VEKTÖRÜN DİKLİĞİ

10. BİRİM VEKTÖR

11. BİR VEKTÖRÜ NÖRMLAMA

12. TEMEL BİRİM VEKTÖRLERİ

13. VEKTÖRLERDE LİNEER BAĞIMLILIK, LİNEER BAĞIMSIZLIK

14. VEKTÖRLERİN LİNEER BİLEŞİMİ

15. VEKTÖRLERDE İÇ ÇARPMA İŞLEMİ

16. İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI

17. SCHWARTZ (ŞIVARZ) EŞİTSİZLİĞİ

18. GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ALANLARI

19. ÇEMBERİN VEKTÖREL DENKLEMİ

20. DOĞRUNUN VEKTÖREL DENKLEMİ

ÖZET

ALİŞTIRMALAR

DEĞERLENDİRME TESTİ IV



BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI



- * Yönlü doğru parçalarının, uzunluğunu, taşıyıcısını, sıfır yönlü doğru parçasını, paralel ve eş yönlü doğru parçalarını tanıyabilecek ve bunları sembollerle gösterebilecek,
- * Vektörleri ve özelliklerini tanıyabilecek, yönlü doğru parçaları ile vektörler arasındaki ilişkiyi yazabilecek,
- * Verilen bir yönlü doğru parçasının başlangıç noktasını, bitim noktasını, doğrultusunu, yönünü, uzunluğunu belirtebilecek,
- * Verilen bir yönlü doğru parçasının ters yönlüsünü ve dışındaki bir noktada eş bir yönlü doğru parçasını çizebilecek,
- * Vektörler kümesinde; toplama işlemi, çıkarma işlemi, bir vektörün bir reel sayı ile çarpma işlemini yapabilecek,
- * Vektörler bilgisinin geometriye uygulanmasına ait problemleri çözebilecek,
- * Analitik düzlemde, yer vektörünü, iki vektörün eşitliğini yer vektörün uzunluğunu bileşenleri cinsinden yazabilecek,
- * İki vektörün paralellığı ve dikliğini, bileşenleri arasındaki ilişkiyi bulabilecek ve iki vektörün paralel veya dik olup olmadığını belirleyebilecek,
- * Temel baz vektörlerini söyleyebilecek ve sembollerle gösterebilecek,
- * İki vektörün lineer bağımlı veya lineer bağımsız olmalarını belirtebilecek,
- * Vektörlerde iç çarpma işlemini hesaplayabilecek,
- * Verilen iki vektör arasındaki açıyı hesaplayabilecek ve iki vektörün dik olup olmadığını gösterebilecek,
- * Geometrik şekillerin alanlarını vektörler yardımıyla hesaplayabilecek,
- * Verilen çemberin denklemini vektörler yardımıyla yazabilecek,
- * Verilen doğrunun denklemini vektörler yardımıyla yazabileceksiniz.

**NASIL ÇALIŞMALIYIZ?**

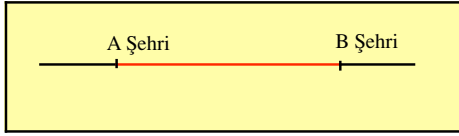
- * Verilen tanımları iyi anlayınız. Tanımlar arasındaki ilişkileri kavramaya çalışınız.
- * Ünite ile ilgili çeşitli kaynak kitaplarından faydalanınız.
- * Özet olarak hazırladığımız kısmı dikkatli bir şekilde çalışınız.
- * Örnek soruları dikkatle inceleyip anlamaya çalışınız kitabı kapatarak tekrar çözmeye çalışınız. Takıldığınız yerde çözüme bakınız.
- * Her konuyu tam olarak öğreniniz. Bir konuyu öğrenmeden diğer konuya geçmeyiniz. Konu ile ilgili bilginiz yeterli değilse soruyu çözmeden önce, kitaplardan veya ders notlarınızdan konuyu yeniden okuyunuz.
- * Varsa verilen şekilden, yoksa uygun şekil çizerek verilenlerle istenilen arasındaki ilişkiyi araştırınız.
- * Ünitenin sonunda verilen alıştırmaları ve değerlendirme testini mutlaka çözünüz. Çözemediğiniz taktirde ünitedeki bilgi ve örnekleri tekrar ediniz. Değerlendirme testinin cevaplarını, cevap anahtarı ile karşılaştırınız.

DÜZLEMDE VEKTÖRLER

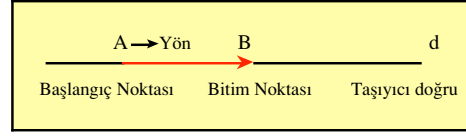
1. YÖNLÜ DOĞRU PARÇASI

A şehri ile B şehri arasında, bir otobüs şirketi yolcu taşımaktadır. A dan B ye gitmek isteyen bir kimse, A dan yola çıkarak B ye doğru $[AB]$ yolunu alacaktır. Dönmek isteyen bir kimse ise $[BA]$ yolunu alacaktır.

Burada alınan yolların başlangıç ve bitim noktaları vardır. Yönleri farklıdır. Doğrultu ve uzunlukları aynıdır. (Şekil 4.1)



Şekil 4.1



Şekil 4.2



I. Yönlü Doğru Parçasının Tanımı

Uç noktalarından birisi **başlangıç noktası**, diğeri **bitim noktası** olacak şekilde seçilen doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir.

Başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir. $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının yönü A den B ye doğrudur.



II. Yönlü Doğru Parçasının Uzunluğu

Bir doğru parçasının başlangıç ve bitim noktaları arasındaki uzaklığa **Yönlü doğru parçasının uzunluğu** denir.

$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının uzunluğu $|\overrightarrow{AB}|$ sembolü ile gösterilir.



III. Yönlü Doğru Parçasının Taşıyıcısı

Bir yönlü doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğruya, yönlü doğru parçasının **taşıyıcı doğrusu** denir. (Şekil 4.2) de A ve B noktalarından geçen **d** doğrusuna,

$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının taşıyıcısı denir.



Bir yönlü doğru parçasının belli olabilmesi için; yönü, uzunluğu ve taşıyıcı doğrusu belli olmalıdır.

IV. Sıfır Yönlü Doğru Parçası

Uç noktaları aynı (çakışık) olan yönlü doğru parçaları da vardır.

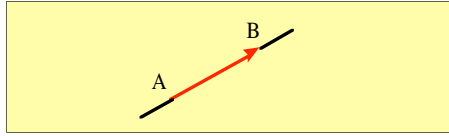
Bir $\overrightarrow{AA}$ noktasını yönlü doğru parçası olarak düşünebiliriz. Bunu $\overrightarrow{AA}$ biçiminde yazarız. $\overrightarrow{AA}$ yönlü doğru parçasının başlangıç noktası A ve bitim noktası da A dır. Yönü ise belirsizdir. $\overrightarrow{AA}$ Yönlü doğru parçasının uzunluğu sıfırdır. $|\overrightarrow{AA}| = 0$ ve taşıyıcısı belirsizdir.

ÖRNEK 1

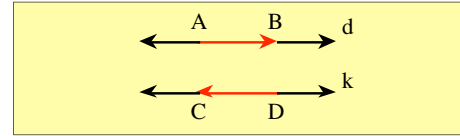
Şekil 4.3' de verilen yönlü doğru parçasının, başlangıç noktasını, bitim noktasını, doğrultusunu, yönünü ve uzunluğunu belirtelim.

ÇÖZÜM 1

Verilen yönlü doğru parçasının; başlangıç noktası A, bitim noktası B dir. Yönü A dan B ye doğrudur. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ için ortak olan AB doğrusu doğrultusudur. Uzunluğu, A ve B noktaları arasındaki uzaklığa yani $[AB]$ nin uzunluğuna eşittir. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ dir.



Şekil 4.3



Şekil 4.4

V. Paralel Yönlü Doğru Parçaları



İki yönlü doğru parçasının taşıyıcıları çakışık veya paralelse, bu yönlü doğru parçalarına **paralel yönlü doğru parçaları** denir.

$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçalarının paralellliği $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ sembolü ile gösterilir (Şekil 4.4).

ÖRNEK 2: Verilen bir $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile ters yönlü olan yönlü doğru parçasını çizelim.

ÇÖZÜM 2

$\overrightarrow{BA}$ yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğrusu parçasının ters yönüsüdür. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğru parçalarının sadece yönleri farklıdır. Taşıyıcı doğruları aynı, uç noktaları da aynı noktalardır. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ nın yönleri birbirinin tersidir.

$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile ters yönlü olan başka yönlü doğru parçaları da vardır. $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının taşıyıcısı d doğrusu üzerinde veya bu taşıyıcıya paralel olan k doğrusu üzerinde $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile ters yönlü olan başka yönlü olan doğru parçaları da çizilebilir. $\overrightarrow{DC}$ yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile ters yönlüdür. (Şekil 4.4)

VI. Eş Yönlü Doğru Parçaları

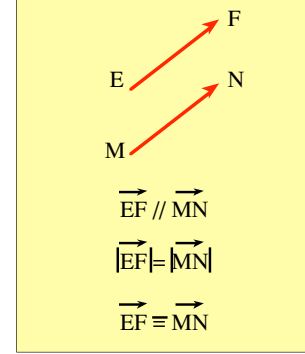
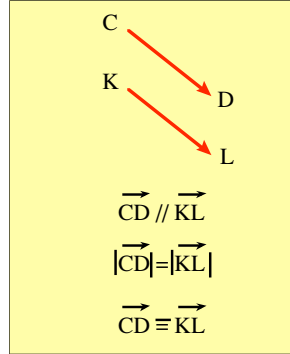
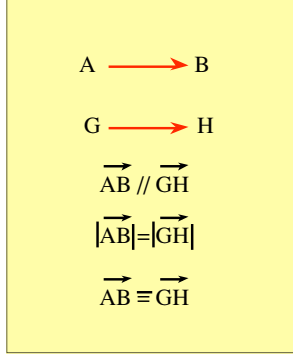


Uzunlukları sıfırdan farklı olan $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçalarının, doğrultuları, yönleri, uzunlukları aynı ise $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçalarına **birbirine eş yönlü doğru parçaları** denir.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçalarının eşliği, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ şeklinde gösterilir. $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$ yönlü doğru parçaları da eş yönlü doğru parçaları olarak kabul edilir ve $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$ dir.

ÖRNEK 3 : Aşağıdaki $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{EF}$ yönlü doğru parçalarına eş yönlü doğru parçaları çizelim.

ÇÖZÜM 3: Aşağıdaki şekillerde olduğu gibi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{EF}$ yönlü doğru parçalarına $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{KL}$ ve $\overrightarrow{MN}$ eş yönlü doğru parçaları çizilebilir.



ÖRNEK 4: Verilen ABCD paralelkenarında birbirine eş olan yönlü doğru parçalarını yazalım (Şekil 4.5).

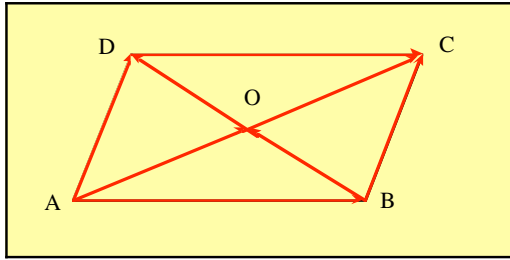
ÇÖZÜM 4: Bir paralelkenarda karşılıklı kenarları eşit ve paralel, köşegenleri birbirini ortalar. Bu özelliğinden faydalanılarak;

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ve $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ olduğundan, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{DC}$ dir.

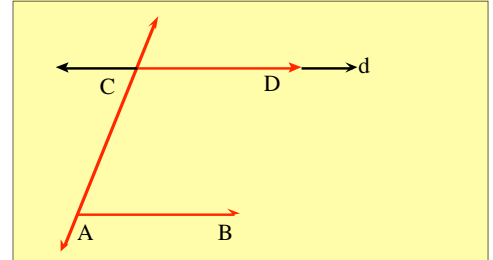
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ ve $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ olduğundan, $\overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{AD}$ dir.

$\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{OC}$ ve $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$ olduğundan, $\overrightarrow{AO} \equiv \overrightarrow{OC}$ dir.

$\overrightarrow{BO} \parallel \overrightarrow{OD}$ ve $|\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{OD}|$ olduğundan, $\overrightarrow{BO} \equiv \overrightarrow{OD}$ dir.



Şekil 4.5



Şekil 4.6

ÖRNEK 5: Verilen bir yönlü doğru parçasına dışındaki bir noktadan eş yönlü bir doğru parçasını çizelim.

ÇÖZÜM 5: Verilen $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına dışındaki C noktasından eş yönlü $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçasını çizmek için, önce A ve C den geçen AC doğrusu çizilir. Üzerindeki C noktasından $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına paralel olan bir d doğrusu çizilir. Bunun üzerinde, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ olacak şekilde bir D noktası işaretlenerek istenen yönlü doğru parçası çizilir (Şekil 4. 6).

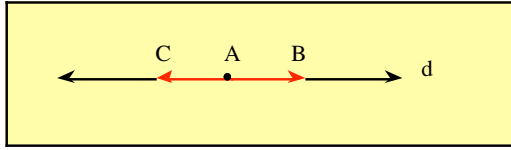
ÖRNEK 6: Verilen $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına eşit uzunlukta, aynı doğrultu ve ters yönlü doğru parçasını çizelim.

ÇÖZÜM 6: Çizimi iki şekilde yapabiliriz.

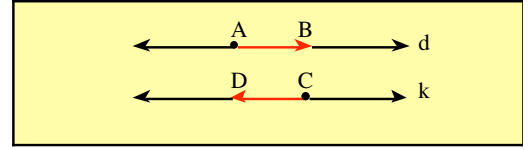
a) d doğrusu üzerinde zıt yönlü $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ alalım. (Şekil 4. 7)

C, A ve B noktaları doğrusaldır. $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$ olur.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ve $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ olduğundan, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ olur.



Şekil 4.7



Şekil 4.8

b) d // k doğrularını çizelim. (Şekil 4. 8) k doğrusu üzerinde $\overrightarrow{AB}$ ile zıt yönlü $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}|$ çizersek $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ olur.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ve $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ olduğundan, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$ olur.

Böylece $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına ters yönlü, $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçası çizilmiş olur.

2. VEKTÖRLER

Düzlemdeki bütün yönlü doğru parçalarının kümesi K olsun. K kümesinde tanımlı eş olma (eşlik) bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim. (Şekil 4.9)

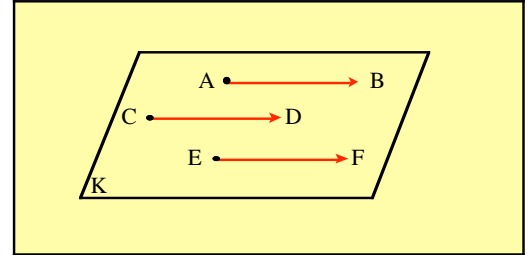
Bu bağıntının:

1. Yansıma özelliği vardır.

Her yönlü doğru parçası kendisine eşittir.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF},$$

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{BB}, \dots$$



Şekil 4.9

2. Şimetre özelliği vardır. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ise $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ dir.

3. Geçişme özelliği vardır. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ ise $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ dir.



Düzlemdeki bütün yönlü doğru parçalarının K kümesinde tanımlanan eşlik bağıntısı, bir **denklik bağıntısıdır**. Eşlik bağıntısı, düzlemdeki yönlü doğru parçalarının K kümesini, denklik sınıflarına ayırır.



I. Vektörün Tanımı

Düzlemdeki yönlü doğru parçalarının kümesinde tanımlı, eşlik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarının her birine, **vektör** denir.

(Şekil 4. 9) da $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına eş olan yönlü doğru parçalarından bazıları gösterilmiştir. $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına, eş olan tüm yönlü doğru parçalarının kümesi $\{ \overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \equiv \overrightarrow{AB} \}$ dir.



$\overrightarrow{AB}$ vektörünü $\overrightarrow{AB} = \{ \overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \equiv \overrightarrow{AB} \}$ şeklinde de gösterebiliriz.

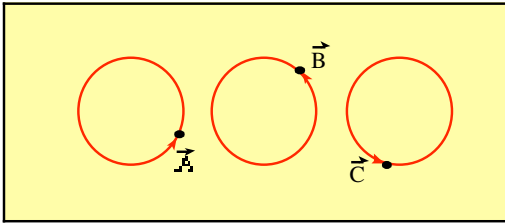


II. Sıfır Vektörü

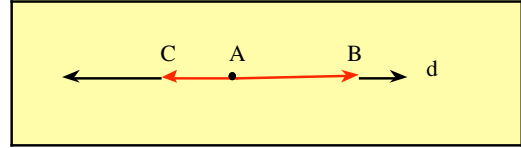
Başlangıç ve bitim noktası aynı olan vektöre **sıfır vektörü** denir.

$\vec{O} = \{ \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots \}$ kümesinde $\vec{O} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}, \dots$ şeklinde gösterilir.

Sıfır vektörün uzunluğu $|\overrightarrow{AA}| = |\overrightarrow{BB}| = 0$ (sıfırdır) yönü ve doğrultusu tanımsızdır (belirsizdir). (Şekil 4.10) da sıfır vektörleri gösterilmiştir.



Şekil 4.10



Şekil 4.11



III. Ters (Zıt Vektörler)

Doğrultuları aynı, yönleri ters olan vektörlere, **ters (zıt) vektörler** denir. Bu yönlü doğru parçalarının boyları eşit de olabilir farklı da olabilir.

Verilen (Şekil 4.11) de $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri ters (zıt) vektörlerdir.



IV. Bir Vektörün Normu

$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçalarının A noktası ile B noktası arasındaki uzaklığa $\overrightarrow{AB}$ vektörünün **normu** (büyüklüğü, uzunluğu) denir.

$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının uzunluğu, $|\overrightarrow{AB}|$ sembolü ile gösterilir.

$\overrightarrow{AB}$ vektörünün büyüklüğü (normu), $||\overrightarrow{AB}||$ sembolü ile gösterilir.

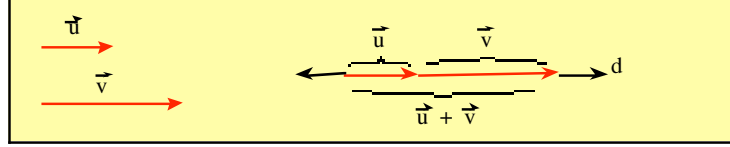
$\overrightarrow{AB}$ vektörünün normu diye okunur.

$||\overrightarrow{AB}|| = |\overrightarrow{AB}| = a$ ise, $a \geq 0$ dır. $||\overrightarrow{AA}|| = ||\vec{O}|| = 0$ dır.

3. VEKTÖRLER KÜMESİNDE İŞLEMLER

I. Toplama İşlemi

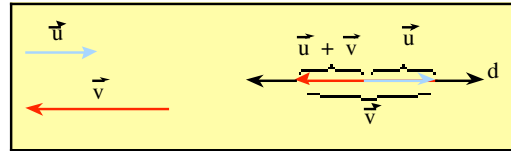
a. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin doğrultuları ve yönleri aynı olmaları durumunda



Şekil 4.12

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri aynı yönlü olduklarından d doğrusu üzerinde $\vec{u}$ vektörü alınır. $\vec{u}$ vektörünün bitim noktasından itibaren $\vec{v}$ vektörü alınır. Böylece $\vec{u} + \vec{v}$ vektörlerin toplamı bulunur. (Şekil 4. 12)

b. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin doğrultuları aynı zıt yönlü olmaları durumunda

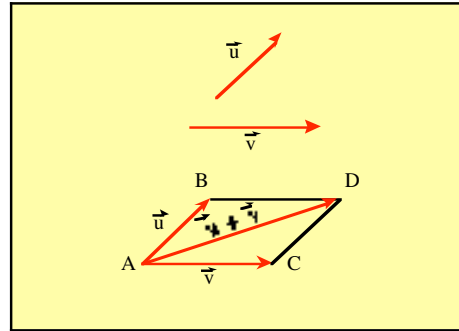


Şekil 4.13

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin doğrultuları aynı yönleri zıt olmaları durumunda $\vec{u} + \vec{v}$ vektörlerin toplamı (Şekil 4.13) de çizilmiştir.

c. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin doğrultuları aynı olmayan iki vektör olmaları durumunda

Başlangıç noktaları düzlemin bir A noktası olsun, $\vec{AB} = \vec{u}$ ve $\vec{AC} = \vec{v}$ olacak şekilde $\vec{AB}$ ve $\vec{AC}$ vektörlerini çizelim. (Şekil 4.14) de ACDB paralelkenarına şekilde $\vec{AB}$ ve $\vec{AC}$ vektörlerini çizelim. (Şekil 4.14) de ACDB paralelkenarına tamamlayalım. $\vec{AD}$ vektörüne, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörünün toplamı denir.



Şekil 4.14

Paralel kenarda karşılıklı kenarlar birbirine eşit ve paralel olduğundan $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ dir. O halde $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ olur. Paralelkenar çizmeden de iki vektörün toplamını ACD üçgenleri yardımıyla da bulabiliriz. Yapılan bu işleme geometrik toplama işlemi denir.

ÖRNEK 7

Verilen (Şekil 4.15) te [BC] doğru parçasının orta noktası O olsun.

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ olduğunu gösterelim.

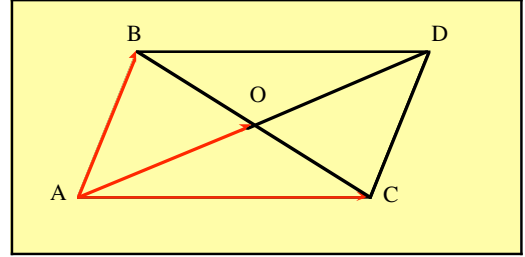
ÇÖZÜM 7

$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörlerinin toplamını paralelkenar yolu ile bulursak $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ dir.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ dir.

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ olduğundan,

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ olur.



Şekil 4.15

ÖRNEK 8

$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ vektörlerin toplamını bulalım.

ÇÖZÜM 8

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ dir. ($\overrightarrow{AA}$ nın temsil ettiği vektör sıfır vektörüdür). O halde, $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ vektörleri, birbirinin toplama işlemine göre tersleridir. Bu nedenle, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ yazılır. yani $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ olur.

II. Vektörler Kümesi Toplama İşlemine Göre Değişmeli Bir Grup tur.

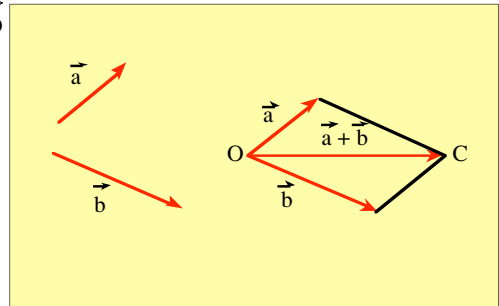
a. Vektörler kümesi toplama İşlemine göre kapalıdır.

Şekil 4.16'da düzlemde verilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin toplamını hesaplayalım .

$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ dir.

O halde, iki vektörün toplamı yine bir vektördür.

Vektörler kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.



Şekil 4.16

b. Vektörler kümesinin toplama işlemine göre, birleşme özelliği vardır.

Şekil 4.17'de düzlemde verilen

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ toplamalarını hesap edelim.

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ ve $\vec{BC} = \vec{c}$

vektörlerini çizelim.

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ yeni $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ dir.

OBC üçgeninde, $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

yani $\vec{OC} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ dir. (1.)

ABC üçgeninde $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ yani $\vec{AC} = \vec{b} + \vec{c}$ dir.

OAC üçgeninde, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ yani $\vec{OC} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ dir. (2.)

(1.) ve (2.) den $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ olur.

O halde, vektörler kümesinde; toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

c. Vektörler kümesinin toplama işlemine göre, birim (etkisiz) elmanı vardır.

$\vec{AB} = \vec{a}$ olsun. $\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}$ olduğundan $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ dir.

$\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB}$ olduğundan $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ dir. Öyleyse, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olur.

O halde, vektörler kümesinde toplama işlemine göre, birim (etkisiz) elemanı vardır.

d. Vektörler kümesinin toplama işlemine göre, ters elemanı vardır.

$\vec{AB} = \vec{a}$ olsun. $\vec{BA} = -\vec{a}$ dir.

$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ ise, $\vec{a} + (-\vec{a})$ dir. (1)

$\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB}$ ise, $(-\vec{a}) + \vec{a} = -\vec{0}$ dir. (2)

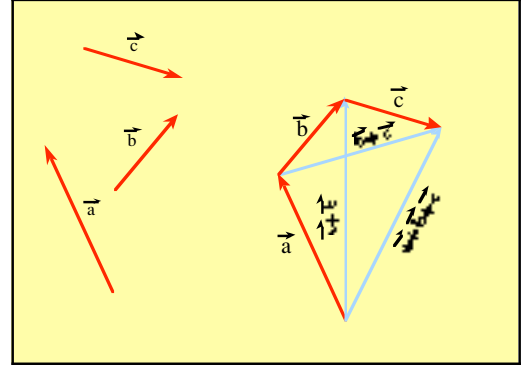
(1) ve (2) den ; $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ olur.

O halde, vektörler kümesinde her $\vec{a}$ elamanının toplama işlemine göre tersi vardır. Bu da $(-\vec{a})$ vektörüdür.

e. Vektörler kümesinin toplama işlemine göre, değişme özelliği vardır.

$\vec{AB} = \vec{a}$ ve $\vec{AC} = \vec{b}$ eş vektörlerini alıp ABDC paralel kenarını çizelim.

(Şekil 4.18) de ABD üçgeninde;



Şekil 4.17

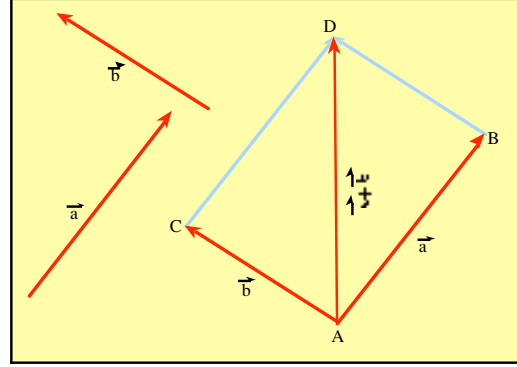
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \text{ ise } \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} \text{ dir. (1)}$$

$$\text{ABC üçgeninde; } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \text{ ise;}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{b} + \vec{a} \text{ dir. (2)}$$

(1) ve (2) den $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ olur.

O halde, vektörler kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.



Şekil 4.18



Vektörler kümesinde toplama işleminin bu beş özelliği nedeniyle **değişmeli grup** olur. Bu değişmeli gruba vektörlerin **toplama grubu** denir.

III. İki Vektörün Farkı



$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri verilmiş olsun. $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektörüne $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin **farkı** denir.

Bu farkı bulma işlemine **çıkarma işlemi** denir.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \text{ ve } \overrightarrow{AD} = \vec{b} \text{ olsun.}$$

(Şekil 4.19) da $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ vektörlerini paralelkenar kuralı ile bulmaya çalışalım.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \text{ yani}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB} \text{ dir.}$$

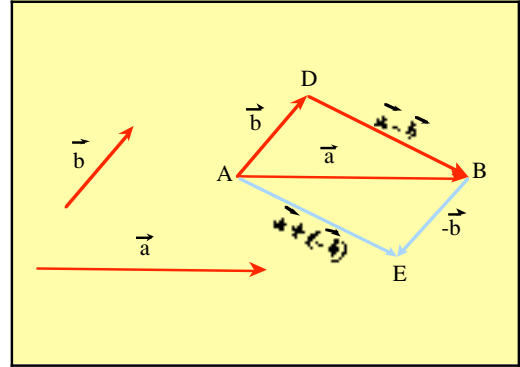
$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DE} \text{ olduğundan,}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} \text{ yani}$$

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE} \text{ olduğundan,}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \text{ olur.}$$



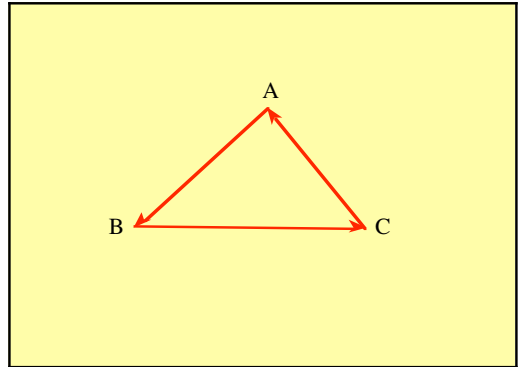
Şekil 4.19

ÖRNEK 9: Verilen bir ABC üçgeninde;

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \text{ olduğunu gösterelim.}$$

ÇÖZÜM 9: Paralelkenar kuralını uygularsak (Şekil 4.20) de;

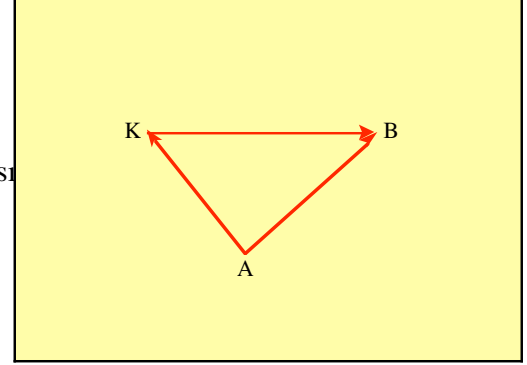
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ elde edilir.}$$



Şekil 4.20

ÖRNEK 10: Bir $\vec{AB}$ vektörü ve herhangi bir K noktası verilmiş olsun.
 $\vec{AB} = \vec{KB} - \vec{KA}$ olduğunu gösterelim.

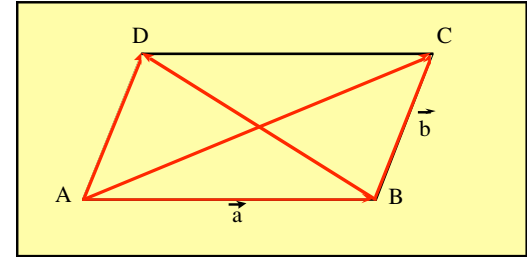
ÇÖZÜM 10: Şekil 4.21'e göre,
 $\vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB}$ eşitliği, her K noktası için doğrudur. $\vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB}$ eşitliğinde $\vec{AK} = -\vec{KA}$ yazılırsa
 $\vec{AB} = -\vec{KA} + \vec{KB} = \vec{KB} - \vec{KA}$ elde edilir.



Şekil 4.21

ÖRNEK 11
 Şekil 4.22'de verilen ABCD paralelkenarında $\vec{AB} = \vec{a}$ ve $\vec{BC} = \vec{b}$ ise; $\vec{AC} + \vec{BD}$ toplamını $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri cinsinden bulalım.

ÇÖZÜM 11
 Bir paralelkenarda karşılıklı kenarlar eşit ve paralel olduğundan,
 $\vec{BC} = \vec{AD}$ dir. $\vec{AB} = -\vec{BA}$ olduğunu düşünürsek
 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$
 $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = (-\vec{a} + \vec{b})$
 $\vec{AC} + \vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a} + \vec{b})$
 $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{b}$ bulunur.



Şekil 4.22

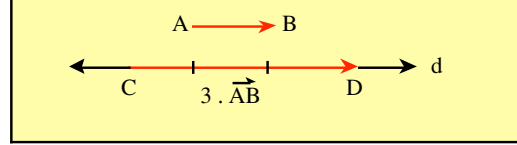
4. BİR VEKTÖRÜN BİR REEL SAYI İLE ÇARPIMI

I. $\vec{AB}$ Vektörü ile $k \in \mathbb{R}$ verilsin

- $k > 0$ ise, $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$ vektörü $\vec{AB}$ vektörü ile aynı doğrultuda ve aynı yöndedir.
 $|\vec{CD}| = k |\vec{AB}|$ olur.
- $k < 0$ ise, $\vec{CD} = k \vec{AB}$ vektörü $\vec{AB}$ vektörü ile aynı doğrultuda ve ters yönlüdür.
 $|\vec{CD}| = |k| |\vec{AB}|$ olur.

ÖRNEK 12: $\vec{AB}$ vektörü veriliyor. Buna göre $3 \cdot \vec{AB}$ vektörünü çizelim.

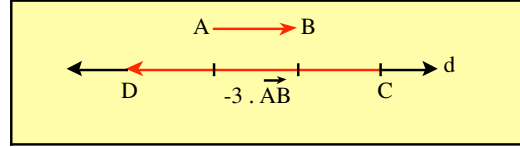
ÇÖZÜM 12: $d \parallel \vec{AB}$ doğrusunu çizelim. d doğrusu üzerinde, $|\vec{CD}| = 3|\vec{AB}|$ olacak şekilde $\vec{AB}$ vektörü ile aynı yönlü $\vec{CD}$ vektörünü çizelim (Şekil 4.23) te, $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$ ve $|\vec{CD}| = 3|\vec{AB}|$ olduğundan, $\vec{CD} = 3 \cdot \vec{AB}$ olur.



Şekil 4.23

ÖRNEK 13: $\vec{AB}$ vektörü veriliyor. Buna göre $-3 \cdot \vec{AB}$ vektörünü çizelim.

ÇÖZÜM 13: $d \parallel \vec{AB}$ doğrusunu çizelim (Şekil (4.24)). d doğrusu üzerinde, $|\vec{DC}| = |-3||\vec{AB}|$ olacak şekilde $\vec{AB}$ vektörü ile ters yönlü $\vec{DC}$ vektörünü çizelim. $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$ ve $|\vec{CD}| = |-3||\vec{AB}|$ olduğundan, $\vec{CD} = -3 \vec{AB}$ olur.



Şekil 4.24

II. $|\vec{CD}| = k |\vec{AB}|$ İşleminin Özellikleri

- $k > 0$ ise, $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ aynı doğrultuda ve yöndedir.
- $k < 0$ ise, $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ aynı doğrultuda ters yöndedir.
- $k = 1$ ise, $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ aynı vektördür.
- $k = -1$ ise, $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ uzunlukları aynı ters yönlüdür.
- $k = 0$ ise, $\vec{CD} = \vec{0} \cdot \vec{AB} = \vec{0}$ olduğundan $\vec{CD}$ sıfır vektörüdür.
- $|k| < 1$ ise, $|k \cdot \vec{AB}| < |\vec{AB}|$ dir.
- $|k| > 1$ ise, $|k \cdot \vec{AB}| > |\vec{AB}|$ dir.

III. Bir vektör ile bir reel sayının çarpımına ait özellikler:

a, b reel sayılarıyla $\vec{AB}$ ve $\vec{CD}$ vektörlerinin çarpımı ile ilgili özellikler şunlardır

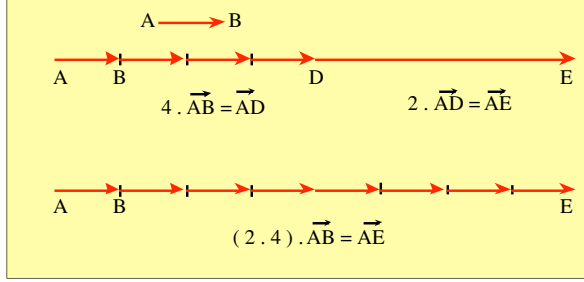
- $(a \cdot b) \cdot \vec{AB} = a \cdot (b \cdot \vec{AB}) = b \cdot (a \cdot \vec{AB})$ dir.
- $|a \cdot b \cdot \vec{AB}| = |a \cdot b| |\vec{AB}|$ dir.
- $a \cdot (\vec{AB} + \vec{CD}) = a \cdot \vec{AB} + a \cdot \vec{CD}$ dir.
- $(a \pm b) \cdot \vec{AB} = a \cdot \vec{AB} \pm b \cdot \vec{AB}$ dir.

ÖRNEK 14

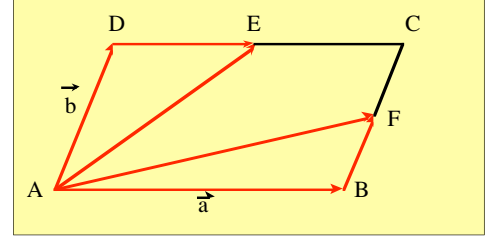
Şekil 4.25'te $\vec{AB}$ vektörü veriliyor. $a = 2$ ve $b = 4$ için $a \cdot (b \cdot \vec{AB}) = a \cdot b \cdot \vec{AB}$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 14

Şekil 4.25'te $2 \cdot (4 \cdot \vec{AB}) = (2 \cdot 4) \vec{AB} = \vec{AE}$ olur.



Şekil 4.25



Şekil 4.26

5. VEKTÖR BİLGİSİNİN GEOMETRİYE UYGULANMASI**PROBLEM 1**

Şekil 4.26'daki paralelkenarda E ve F noktaları ait oldukları kenarların orta noktalarıdır.

$\vec{AB} = \vec{a}$ ve $\vec{AD} = \vec{b}$ olduğuna göre, $\vec{AF}$ ve $\vec{AE}$ vektörlerini $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri cinsinden ifade edelim.

ÇÖZÜM 1

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} \quad \vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$$

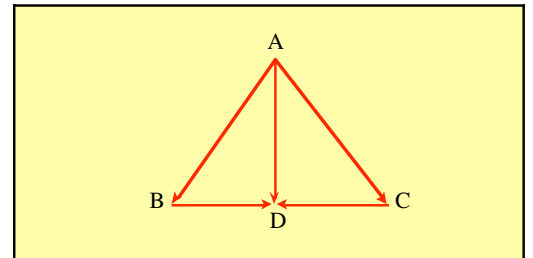
$$\vec{AF} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \text{ olur.} \quad \vec{AE} = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} \text{ olur}$$

PROBLEM 2

Şekil 4.27'deki ABC üçgeninde; $|\vec{BD}| = |\vec{DC}|$ ise, $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 2

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ \vec{AD} &= \vec{AC} + \vec{CD} \\ \hline + \\ 2 \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{AC} + \underbrace{\vec{BD} + \vec{CD}}_0 \\ 2 \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{AC} \\ \vec{AD} &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \text{ olur.} \end{aligned}$$



Şekil 4.27

PROBLEM 3

ABC üçgeninde $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktaları, sıra ile D ve E dir. $DE \parallel BC$ ve $|DE| = \frac{1}{2} |BC|$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 3

Şekil 4. 28'de

$\vec{AD} = \vec{a}$ ve $\vec{AE} = \vec{b}$ vektörü ile gösterirsek,

$\vec{AB} = 2\vec{a}$ ve $\vec{AC} = 2\vec{b}$ olur.

ADE üçgeninde, $\vec{DE} = \vec{b} - \vec{a}$

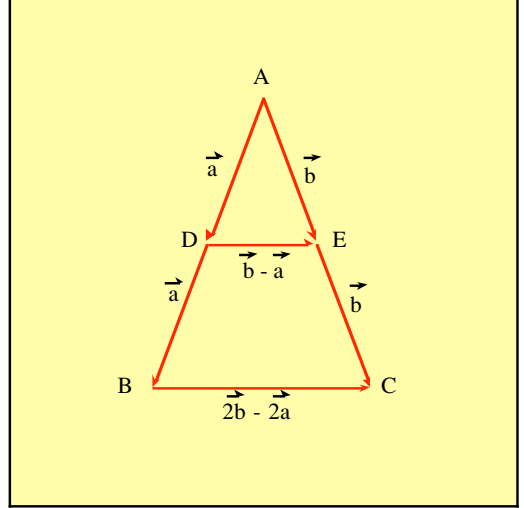
ABC üçgeninde, $\vec{BC} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$ dir.

$\vec{BC} = 2(\vec{b} - \vec{a})$ olduğundan $\vec{BC} = 2\vec{DE}$ olur.

$\vec{BC} = 2\vec{DE}$ ise, $\vec{BC} \parallel \vec{DE}$ ve

$|\vec{BC}| = 2|\vec{DE}|$ dir.

Buna göre; $\vec{DE} \parallel \vec{BC}$ ve $|\vec{DE}| = \frac{1}{2} |\vec{BC}|$ olur.



Şekil 4.28

PROBLEM 4

Şekil 4.29'daki ABCD dörtgeninin,

$[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin orta

noktaları P ve R dir. $\vec{PR}$ vektörünü

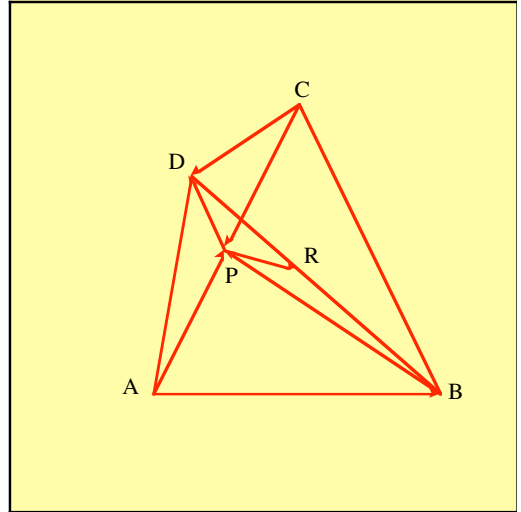
$\vec{AB}$ ve $\vec{CD}$ vektörleri cinsinden bulalım.

ÇÖZÜM 4

$$\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB}$$

$$\vec{CD} = \vec{CP} + \vec{PD}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AP} + \vec{CP} + \vec{PB} + \vec{PD} \text{ dir.} \end{array}$$



Şekil 4.29

$[AC]$ nın orta noktası P olduğundan, $\vec{AP} = \vec{PC}$ ve $\vec{AP} = -\vec{CP}$ dir.

PDB üçgeninde, $\vec{PR}$ kenarortay olduğundan, $\vec{PB} + \vec{PD} = 2\vec{PR}$ dir.

Bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \underbrace{-\vec{CP} + \vec{CP}}_0 + 2\vec{PR} \text{ ise } 2\vec{PR} = \vec{AB} + \vec{CD} \quad \vec{PR} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD}) \text{ bulunur.}$$

PROBLEM 5: Bir konveks dörtgenin kenarlarının orta noktalarının bir paralelkenarın köşeleri olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 5: Şekil 4.30'da ABD üçgeninde;

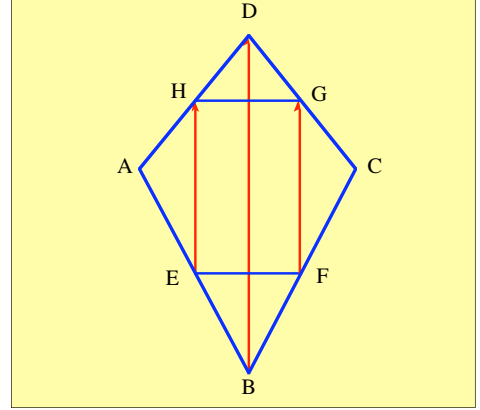
$$\overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{FG} \text{ ve } |\overrightarrow{EH}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BD}| \quad (\text{I.})$$

(Problem 3 gösterildi.)

$$\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BD} \text{ ve } |\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BD}| \quad (\text{II.})$$

I. ve II. eşitlikten

$$\overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{FG} \text{ ve } |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{FG}| \text{ olur.}$$



Şekil 4.30

Karşılıklı kenarları eşit ve paralel olan dörtgen bir paralelkenar olacağından EFGH dörtgeni paralelkenardır.

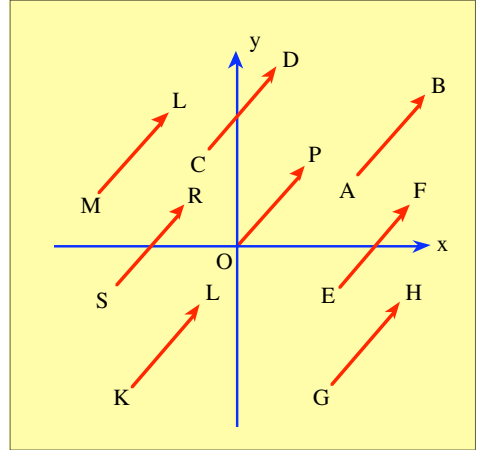
6. ANALİTİK DÜZLEMDE

VEKTÖRLER

I. Yer Vektörü (Konum Vektörü)

Şekil 4.31'deki, analitik düzlemde çizilmiş olan yönlü doğru doğru parçaları birbirine eşit. Bu yönlü doğru parçalarına eş olan bütün yönlü doğru parçaların oluşturduğu kümenin (denklik sınıfının) bir vektör belirttiğini biliyoruz. Bu vektörler eş yönlü doğru parçalarından herhangi biri ile temsil edilebilir.

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ML}, \dots \text{ gibi}$$



Şekil 4.31



Analitik düzlemde bulunan ve başlangıç noktası 0 (0, 0) noktası olan bir vektöre **yer vektörü** ya da **konum vektörü** denir.

Şekil 4.31'de, bu vektörü başlangıç noktası 0 (0, 0) olan $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçası temsil ediyor. $\overrightarrow{OP}$ vektörüne **yer (konum) vektörü** denir.



Analitik düzlemde tanımlanan her noktaya bir yer vektörü karşılık gelir karşıt olarak analitik düzlemde tanımlanan her yer vektörüne bir nokta karşılık gelir. Bu nokta yer vektörünün bitim noktasıdır.

Analitik düzlemde bir $P(x, y)$ noktası verildiğinde, $\overrightarrow{OP} = \vec{P}$ vektörü ile belirtilmiş olur. P noktasının koordinatları (x, y) ise, $\overrightarrow{OP} = \vec{P}$ vektörü

$\vec{P} = (x, y)$, $\vec{P} = [x, y]$ ya da $\vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ şeklinde yazılır. Biz $\vec{P} = (x, y)$ şeklini kullanacağız.



Uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere çizilen $\vec{AB}$ vektörünün yer (konum) vektörü $\vec{OP} = \vec{P} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ dir.



Köşelerinin koordinatları verilen bir $\vec{AB}$ vektörünün yer (konum) vektörünün koordinatları, verilen $\vec{AB}$ vektörünün bitim noktasının koordinatlarından, başlangıç noktasının koordinatları çıkarılarak hesaplanır. x lerin farkına yer vektörün birinci birleşeni, y lerin farkına da ikinci birleşeni denir.

ÖRNEK 15: $\vec{A} = (3, 4)$, $\vec{B} = (-3, 2)$ ve $\vec{C} = (1, -3)$ vektörlerini analitik düzlemde gösterelim.

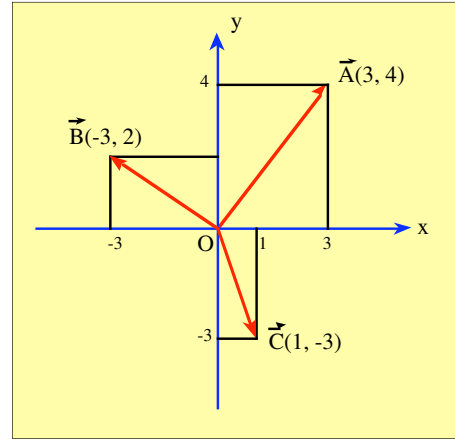
ÇÖZÜM 15

$\vec{A} = \vec{OA}$ olduğundan $\vec{A} = (3, 4)$ vektörü başlangıç noktası $O(0, 0)$, bitim noktası $A(3, 4)$ olan vektördür.

Böylece $\vec{OA} = \vec{A}$ vektörü çizilmiş olur.

$\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri de aynı şekilde gösterilir.

(Şekil 4.32).



Şekil 4.32

ÖRNEK 16: $A(1, 2)$ ve $B(-3, 4)$ noktaları veriliyor. $\vec{AB}$ ve $\vec{BA}$ vektörlerinin yer vektörlerini bulalım. Bu vektörlerin durumlarını açıklayalım.

ÇÖZÜM 16: a) $\vec{AB}$ vektörünün yer vektörü $\vec{P}_1$ olsun.

$\vec{AB} = \vec{P}_1 = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ olduğundan, $\vec{P}_1 = (-3 - 1, 4 - 2)$; $\vec{P}_1 = (-4, 2)$ dir.

b) $\vec{BA}$ vektörünün yer vektörü $\vec{P}_2$ olsun.

$\vec{BA} = \vec{P}_2 = (x_A - x_B, y_A - y_B)$ olduğundan $\vec{P}_2 = (1 + 3, 2 - 4)$; $\vec{P}_2 = (4, -2)$ dir.

Burada, $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$ ve $\vec{AB} = -\vec{BA}$ olduğu görülür. O halde, bu vektörler zıt vektörlerdir.

II. İki Vektörün Eşitliği : iki konum vektörünün eşit olması için gerek ve yeter şart, bunların hem x bileşenlerinin hem de y bileşenlerinin eşit olmasıdır.

$\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A} = \vec{B}$ olması için, $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ dir.

ÖRNEK 17: $\vec{A} = (a + 1, 4)$ ve $\vec{B} = (-1, b + 2)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A} = \vec{B}$ ise, a ve b reel sayılarını bulalım.

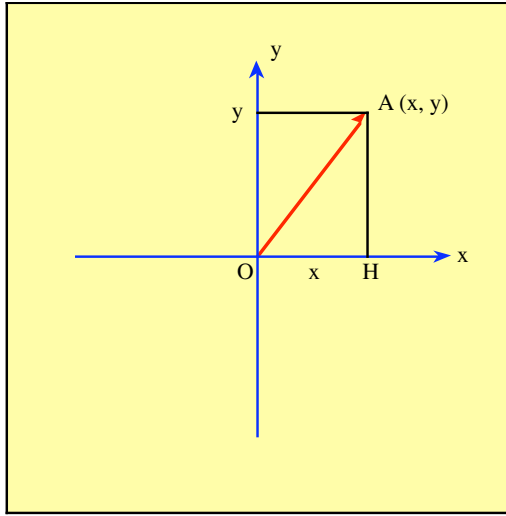
ÇÖZÜM 17: $\vec{A} = \vec{B}$ olması için gerek ve yeter şart.

$a + 1 = -1$ ise $a = -2$ dir. $b + 2 = 4$ ise $b = 2$ olur.

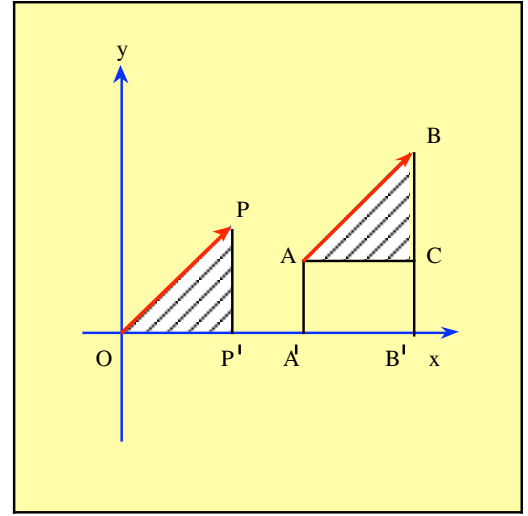
III. Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)



a. Şekil 4.33'te, $\vec{A} = (x, y)$ yer vektörü veriliyor. $|OA|$ uzunluğuna $\vec{A}$ vektörün **uzunluğu** (normu) denir. $\|\vec{OA}\| = \|\vec{A}\|$ ile gösterilir. AOH dik üçgende pisagor teoremine göre; $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ birimdir.



Şekil 4.33



Şekil 4.34



Yer vektörün uzunluğu (normu), yer vektörünün bileşenlerinin kareleri toplamının kareköküne eşittir.

b. Şekil 4. 34'te verilen başlangıç noktası $A(x_1, y_1)$ ve bitim noktası $B(x_2, y_2)$ olan $\vec{AB}$ vektörünün konum vektörünün uzunluğunu (normunu) hesaplamak için, daha önce olduğu gibi, $\|\vec{AB}\| = \|\vec{OP}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ birim olarak bulunur.

ÖRNEK 18: $\vec{A} = (3, 4)$ olan $\vec{A}$ vektörünün uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM 18: $\vec{A} = (3, 4)$ ise $\|\vec{A}\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ birim olur.

ÖRNEK 19 : Başlangıç noktası $A(1, 1)$ ve bitim noktası $B(1, 5)$ olan $\vec{AB}$ vektörünün uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM 19: $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ifadesinden

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(0)^2 + (4)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ birim olur.}$$

7. ANALİTİK DÜZLEMDE VEKTÖRLERLE İLGİLİ İŞLEMLER

I. İki Vektörün Toplamı

Düzlemde birleşenleri $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ olan iki vektör veriliyor.

Bu iki vektörün toplamı $\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ dir.



Buna göre, iki vektörün toplamının birleşenleri, toplanan vektörlerinin birleşenlerinin toplamına eşittir.

ÖRNEK 20: $\vec{A} = (1, 4)$ ve $\vec{B} = (3, -2)$ ise $\vec{A} + \vec{B}$ vektörünü bulalım.

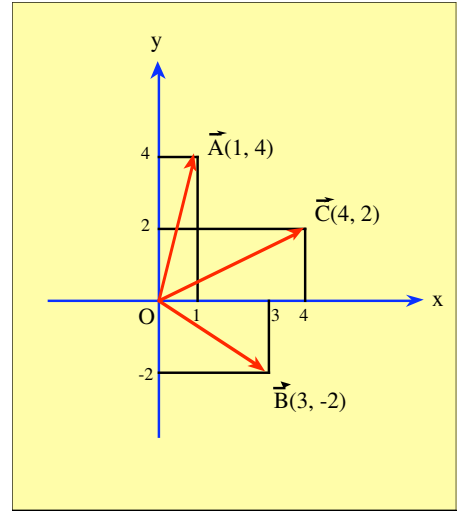
Analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM 20

$\vec{A} = (1, 4)$ ve $\vec{B} = (3, -2)$ ise,

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (1 + 3, 4 - 2) = (4, 2)$ olur.

Şekli analitik düzlemde göstermek istersek (Şekil 4.35) te, OBCA paralelkenarında O (0, 0), B (3, -2), C (4, 2) ve A (1, 4) noktaları, paralel kenarın köşeleridir. Bir paralelkenarın, karşılıklı köşelerinin koordinatları, vektörlerin toplamına eşittir.



Şekil 4.35

Toplama İşleminin Özellikleri

Düzlemde $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ herhangi üç vektör olsun.

a. İki vektörün toplamı yine bir vektördür. (Kapalılık özeliği)

b. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ (birleşme özeliği)

c. $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$ (birim eleman özeliği)

d. $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}$ olacak şekilde her bir $\vec{A}$ vektörü için bir tek $-\vec{A}$ vektörü vardır. (Ters eleman özeliği)

e. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (Değişme özeliği)



Vektörlerde toplama işlemi bu beş özeliğe sahip olduğu için vektörler kümesi toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

ÖRNEK 21: $\vec{A} = (2, 1)$ vektörünün toplama işlemine göre tersini bulalım.

ÇÖZÜM 21: $\vec{A}$ vektörünün toplama işlemine göre tersi $\vec{B} = (x, y)$ olsun.

Tanıma göre, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$ olmalıdır.

$$\vec{A} + \vec{B} = (2, 1) + (x, y) = (2 + x, 1 + y) = (0, 0)$$

$$2 + x = 0 \text{ ise } x = -2 \text{ dir.}$$

$$1 + y = 0 \text{ ise, } y = -1 \text{ dir.}$$

O halde, $\vec{A} = (2, 1)$ vektörünün toplama işlemine göre tersi

$$\vec{B} = (-2, -1) \text{ olur.}$$

II. İki Vektörün Farkı

Düzlemde $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri veriliyor.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \text{ şeklinde yazılır.}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \text{ bulunur.}$$



Buna göre, iki vektörün farkının bileşenleri, çıkarılan vektörlerin birleşenlerinin farkına eşittir.

ÖRNEK 22: $\vec{A} = (3, 5)$ ve $\vec{B} = (-1, 3)$ ise $\vec{A} - \vec{B}$ vektörünü bulalım.

$$\vec{A} - \vec{B} = [3 - (-1), (5 - 3)] = (3 + 1, 5 - 3) = (4, 2) \text{ olur.}$$

III. Bir vektörün Bir reel sayı ile çarpımı

Düzlemdeki bir $\vec{A} = (x, y)$ vektörünün k reel sayısı ile çarpımı

$k \cdot \vec{A} = k(x, y) = (kx, ky)$ şeklinde tanımlanır. k reel sayısı ile $\vec{A}$ vektörünün çarpımı olarak adlandırılır.

ÖRNEK 23

Düzlemde $\vec{A} = (3, -2)$ vektörü veriliyor. $3\vec{A}$, $\frac{1}{2}\vec{A}$, $-1\vec{A}$ vektörlerini bulalım.

ÇÖZÜM 23

$$3\vec{A} = 3(3, -2) = (9, -6) \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{2}\vec{A} = \frac{1}{2}(3, -2) = \left(\frac{3}{2}, -1\right) \text{ dir.}$$

$$-1\vec{A} = -1(3, -2) = (-3, 2) \text{ dir.}$$

Bir vektörün bir reel sayı ile çarpımına ait özellikler

I. özellik: $\vec{A} \in V$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ olsun,

- a. $m \cdot (n \cdot \vec{A}) = (m \cdot n) \cdot \vec{A}$
- b. $(m+n) \cdot \vec{A} = m \cdot \vec{A} + n \cdot \vec{A}$
- c. $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$
- d. $-1 \cdot \vec{A} = -\vec{A}$
- e. $0 \cdot \vec{A} = \vec{0}$

II. özellik: $\vec{A}, \vec{B} \in V$ ve $m \in \mathbb{R}$ olsun.

$$m \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = m \cdot \vec{A} + m \cdot \vec{B} \text{ dir.}$$

III. özellik: $\vec{A}, \vec{B} \in V$ ve $m \in \mathbb{R}$ için $m \cdot \vec{A} = \vec{B}$ olsun,

- a. $m > 0$ ise $\vec{B}$ ile $\vec{A}$ aynı yönlü ve $||\vec{B}|| = m ||\vec{A}||$
- b. $m < 0$ ise $\vec{B}$ ile $\vec{A}$ ters yönlü ve $||\vec{B}|| = -m ||\vec{A}||$
- c. $m = 0$ ise $\vec{B} = \vec{0}$ olur.

8. İKİ VEKTÖRÜN PARALELLİĞİ

Düzlemde sıfırdan farklı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri verilsin.

$\vec{A} // \vec{B}$ olabilmesi için, $\vec{A} = k \cdot \vec{B}$ eşitliğini gerçekleyen bir k reel sayısının varlığına bağlıdır.

$\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri birbirine paralel ise $(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$ dir.
 $(x_1, y_1) = (kx_2, ky_2)$ ise $x_1 = kx_2$ ve $y_1 = ky_2$ eşitliğinden, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$ dir.

Buradan, $x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 = 0$ olur.



Taşıyıcıları paralel olan vektörler de birbirine paraleldir.

Paralel vektörlere Lineer bağımlı vektörler denir.

ÖRNEK 24: Düzlemde $\vec{A} = (-3, -6)$ ve $\vec{B} = (1, 2)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A} // \vec{B}$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 24: $\vec{A} // \vec{B}$ olabilmesi için $\vec{A} = k \cdot \vec{B}$ eşitliğini sağlayan bir k reel sayısının varlığını göstermeliyiz.

$$(-3, -6) = -3(1, 2) \text{ eşitliğinde } \vec{A} = -3 \cdot \vec{B} \text{ olduğundan, } \vec{A} // \vec{B} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 25: Düzlemde $\vec{A} = (2, 6)$ ve $\vec{B} = (1, a+2)$ vektörleri veriliyor. $\vec{A} \parallel \vec{B}$ olsun. $\vec{B}$ vektörünün uzunluğunu (normu) bulalım.

ÇÖZÜM 25: $\vec{A} \parallel \vec{B}$ olduğundan $\frac{2}{1} = \frac{6}{a+2}$ eşitliğinden, $2a + 4 = 6$ dir.

$a = 1$ olur. O halde, $B(1, 3)$ tür.

$\vec{B}$ vektörünün uzunluğu: $\|\vec{B}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ birim olur.

9. İKİ VEKTÖRÜN DİKLİĞİ

Düzlemde sıfırdan farklı $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve

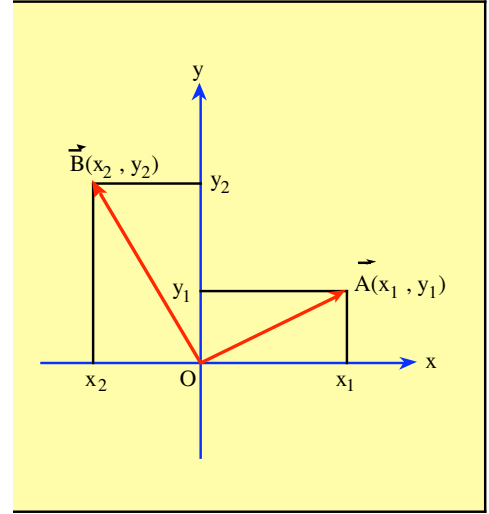
$\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri verilsin. (Şekil 4.36)

$\vec{A} \perp \vec{B}$ ise, $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ dir.

Bu vektörlerin eğimleri $m_{OA} \cdot m_{OB} = -1$ dir.

Buradan $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ veya

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ olarak bulunur.



Şekil 4.36

ÖRNEK 26

Düzlemde $\vec{A} = (2 + a, 3)$ ve $\vec{B} = (3, -5)$ vektörleri veriliyor. $\vec{A} \perp \vec{B}$ ise a reel sayısını bulalım.

ÇÖZÜM 26

$\vec{A} \perp \vec{B}$ ise $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ dir, $(2+a) \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0$ olduğundan

$6 + 3a - 15 = 0$; $3a = 9$; $a = 3$ olur.

10. BİRİM VEKTÖR



Uzunluğu bir birim olan vektöre **birim vektör** denir.

$\vec{A} = (x, y)$ vektörü için $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ise ; $\vec{A} = (x, y)$ vektörü birim vektördür. Buradan $x^2 + y^2 = 1$ olur. Bu denklem birim çember denklemidir.



Başlangıç noktası orijin, bitim noktası birim çember üzerinde herhangi bir nokta olan her vektör, birim vektördür.

ÖRNEK 27: Birim çember üzerinde herhangi bir $P(\cos \theta, \sin \theta)$ noktası için, $\vec{OP}$ vektörünün birim vektör olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM 27: $\|\vec{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$ birim olur.

O halde, $\vec{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$ vektörü birim vektördür.

ÖRNEK 28: $\vec{A} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ vektörünün birim vektör olup olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM 28: $\vec{A}$ vektörünün birim vektör olması için uzunluğu birbirim olmalıdır.

$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1 \text{ birim olur.}$$

O halde, $\vec{A}$ vektörü birim vektördür.

11. BİR VEKTÖRÜ NORMLAMA



$\vec{A}$ vektörü sıfırdan farklı birim vektör olsun. $\vec{A}$ vektörü; uzunluğunun (normu) tersi ile çarpılırsa bu çarpım bir birim vektör olur. Bu işleme **vektörü normlama** denir.

$\vec{A}$ vektörünün normlanmış $\vec{A}_0$ ile gösterilir. O halde $\vec{A}$ vektörünün normlanmış

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \cdot \vec{A} \text{ vektördür.}$$

$\vec{A} = (x, y)$ vektörünün normlaması $\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ olduğundan,

$$\vec{A}_0 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ olur.}$$



$\vec{A}_0$ vektörü $\vec{A}$ vektörü ile aynı doğrultuda ve aynı yönlüdür.

Bir vektörü normlamaya ait özellikler:

a. Her vektörün belirttiği doğrultu ve yönde bir tek birim vektör vardır.

b. $\frac{1}{\|\vec{A}\|} > 0$ olduğundan $\vec{A}$ ile $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ vektörü aynı yönlü ve aynı doğrultudadır.

c. $\vec{A}$ ile aynı yönlü birim vektör $\vec{A}_0 = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \vec{A}$ vektördür.

d. $\vec{A}$ ile ters (zıt) yönlü birim vektör $-\vec{A}_0 = -\frac{1}{\|\vec{A}\|} \cdot \vec{A}$ vektördür.

ÖRNEK 29: $\vec{A} = (-2, 1)$ vektörünün, $\vec{A}$ vektörü ile aynı yönlü birim vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM 29: $\vec{A} = (-2, 1)$ ise $\|\vec{A}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ birimdir.

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \text{ vektörü olur.}$$

ÖRNEK 30: $\vec{A} = (1, -3)$ vektörünün $\vec{A}$ vektörü ile zıt (ters) yönlü birim vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM 30: $\vec{A} = (1, -3)$ ise $\|\vec{A}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ birimdir.

$$\vec{A}_0 = -\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{1}{\sqrt{10}} (1, -3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \text{ vektörü olur.}$$

12. TEMEL BİRİM VEKTÖRLERİ

$\vec{e}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{e}_2 = (0, 1)$ birim vektörlerini analitik düzlemde gösterelim. (Şekil 4.37)

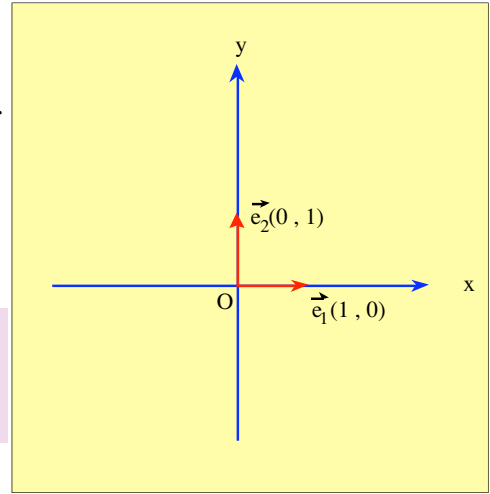
$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1+0} = 1 \text{ ve } \|\vec{e}_2\| = \sqrt{0+1} = 1 \text{ dir.}$$



$\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörlerine, **temel birim vektörler** (standart birim vektörler) denir.



$\vec{e}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{e}_2 = (0, 1)$ standart birim vektörlerinin lineer bileşimi olarak, $\vec{A} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ biçiminde yazılır.



Şekil 4.37

ÖRNEK 31

$\vec{A} = (3, 2)$, $\vec{B} = (-1, 4)$ ve $\vec{C} = (2, -3)$ vektörünün $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ standart birim vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazalım ve bileşenlerini bulalım.

ÇÖZÜM 31

$$\vec{A} = (3, 2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \text{ dir.} \quad \vec{A} \text{ vektörünün birleşenleri, } 3\vec{e}_1 \text{ ve } 2\vec{e}_2 \text{ olur.}$$

$$\vec{B} = (-1, 4) = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \text{ dir.} \quad \vec{B} \text{ vektörünün bileşenleri } -\vec{e}_1 \text{ ve } 4\vec{e}_2 \text{ olur.}$$

$$\vec{C} = (2, -3) = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \text{ dir.} \quad \vec{C} \text{ vektörünün bileşenleri } 2\vec{e}_1 \text{ ve } -3\vec{e}_2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 32

$$\vec{A} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad \text{ve} \quad \vec{B} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

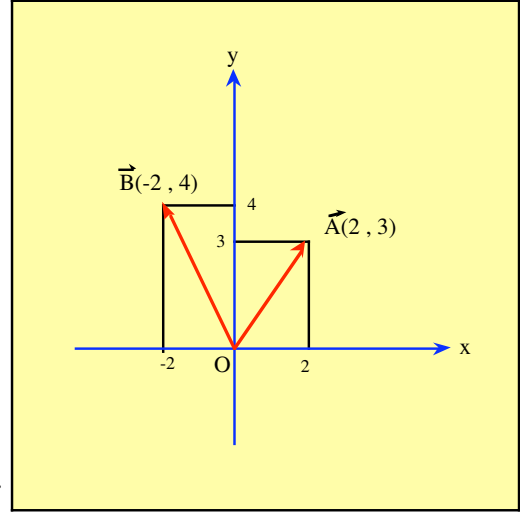
vektörleri veriliyor. Bu vektörleri reel sayı ikililerini biçiminde yazalım. Bu vektörleri analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM 32

$$\vec{A} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = (2, 3)$$

$$\vec{B} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = (-2, 4) \text{ vektörleri}$$

analitik düzlemde gösterilmiştir (Şekil 4.38).



Şekil 4.38

13. VEKTÖRLERDE LİNEER BAĞIMLILIK, LİNEER BAĞIMSIZLIK

a ve b reel sayılar, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birer vektör olmak üzere, $a\vec{A} + b\vec{B} = \vec{0}$ eşitliği, a ve b sayılarından en az biri, sıfırdan farklı iken sağlanıyorsa, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörüne **lineer bağımlı vektörler** denir.

$a\vec{A} + b\vec{B} = \vec{0}$ ise $a\vec{A} = -b\vec{B}$; $\vec{A} = -\frac{b}{a}\vec{B}$; $\vec{A} = k\vec{B}$ ($k \in \mathbb{R}$) yazılır ki, bu durumda, $\vec{A} \parallel \vec{B}$ olduğu görülür.

Vektörlerde lineer bağımlılığa ait özellikler:

- Paralel vektörler lineer bağımlıdır.
- Sıfır vektöründen farklı iki vektör lineer bağımlı ise bu vektörler birbirine paraleldir.
- Düzlemde verilen $\vec{A}$ veya $\vec{B}$ vektörlerinden en az bir tanesi $\vec{0}$ vektörüne eşitse bu iki vektör lineer bağımlıdır.

ÖRNEK 33

$\vec{A} = (2, 1)$ ve $\vec{B} = (-4, -2)$ vektörleri lineer bağımlı olup olmadığını araştıralım.

ÇÖZÜM 33

Tanımdan $a\vec{A} + b\vec{B} = \vec{0}$ bağıntısını sağlayan a ve b gibi hiç olmasa bir tanesi sıfırdan farklı reel sayı varsa lineer bağımlıdır. $a(2, 1) + b(-4, -2) = (0, 0)$ eşitliğinden;

$$\begin{cases} 2a - 4b = 0 \\ (2a, a) + (-4b, -2b) = (0, 0) \\ a - 2b = 0 \end{cases} \quad \text{Denklem sistemi elde edilir.}$$

Bu denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Meselâ: $a = 2$ için $b = 1$ dir.

Bu değerler denklem sisteminin çözümüdür. Öyleyse,

$\vec{A} = (2, 1)$ ve $\vec{B} = (-4, -2)$ vektörleri lineer bağımlıdır.



14. VEKTÖRLERİN LİNEER BİLEŞİMİ

Birbirine paralel olmayan ve her biri sıfırdan farklı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x\vec{A} + y\vec{B}$ vektörüne $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin **lineer bileşimi** (doğrusal bileşimi) denir.

Birbirine paralel olmayan ve her biri sıfır vektöründen farklı iki vektör

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ olduğuna göre, her $\vec{C}$ vektörü için, $\vec{C} = x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B}$ eşitliğini sağlayan bir tane (x, y) sıralı ikilisi vardır.

$x \cdot \vec{A}$ vektörü ile $y \cdot \vec{B}$ vektörüne, $\vec{C}$ vektörünün bileşenleri, $\vec{C}$ vektörüne de $x \cdot \vec{A}$ ile $y \cdot \vec{B}$ vektörlerinin bileşkesi denir.

ÖRNEK 34: $\vec{A} = (-2, 1)$ ve $\vec{B} = (-1, -2)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{C} = (-1, 8)$ vektörünü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazalım.

ÇÖZÜM 34: $\vec{C}$ vektörünü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin bir lineer bileşimi ise $x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B} = \vec{C}$ eşitliğini sağlayan bir (x, y) sıralı ikilisi vardır.

$$x(-2, 1) + y(-1, -2) = (-1, 8)$$

$$(-2x, x) + (-y, -2y) = (-1, 8)$$

$$(-2x - y, x - 2y) = (-1, 8)$$

$$-2x - y = -1$$

$$2/ \quad x - 2y = 8$$

$$-2x - y = -1$$

$$+ \quad 2x - 4y = 16$$

$$-5y = 15$$

$$y = -3 \text{ tür.}$$

Bu değeri $x - 2y = 8$ denklemine uygularsak,

$$x - 2(-3) = 8$$

$$x = 8 - 6$$

$$x = 2 \text{ dir.}$$

O halde sıralı ikili $(2, -3)$ tür.

$$\vec{C} = 2\vec{A} - 3\vec{B} \text{ olur.}$$

15. VEKTÖRLERDE İÇ ÇARPIM İŞLEMİ



$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri için, $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$ reel sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımı denir.



$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımı $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ya da $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ sembollerinden biri ile gösterilir.

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımı işlemine skaler çarpım veya nokta çarpımı ya da Öklid iç çarpımı denir.

Vektörlerde iç çarpım işleminin özellikleri

I. İç çarpımın simetri özeliği vardır.

Her $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri için; $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ dir.

II. İç çarpma işlemi pozitif tanımlıdır.

Her $\vec{A}$ vektörü için; $\vec{A} \cdot \vec{A} \geq 0$ dir.

III. Her $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri ve $k \in \mathbb{R}$ için;

a. $k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B})$ dir.

b. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ dir.

c. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$ dir.



Vektörlerden biri sıfır vektörü ise, iç çarpımı sıfırdır. Ancak, iç çarpım sıfır ise, vektörlerden hiçbirisi sıfır vektörüne eşit olmayabilir.

ÖRNEK 35: $\vec{A} = (1, 2)$ ve $\vec{B} = (3, 2)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM 35: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$ olur.

ÖRNEK 36: $\vec{A} = (4, 2)$, $\vec{B} = (a, 3)$ ve $\vec{A} \cdot \vec{B} = 10$ olduğuna göre, a'nın

değerini bulalım.

ÇÖZÜM 36: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \cdot a + 2 \cdot 3 = 10$

$$4a + 6 = 10$$

$$4a = 4 \quad \text{ise}$$

$$a = 1 \text{ olur.}$$

16. İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI

Analitik düzlemde sıfır vektöründen farklı $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri verilsin (Şekil 4.39) da,

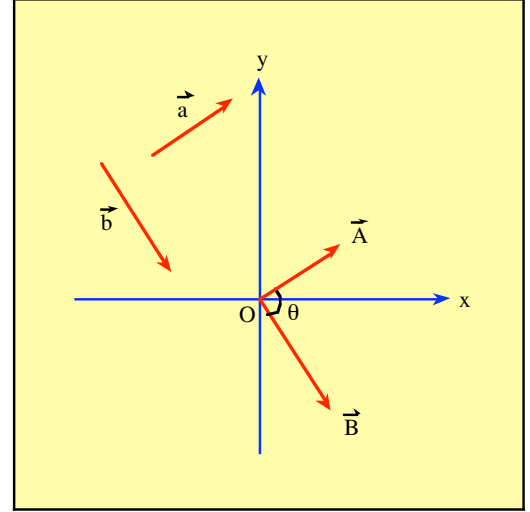
$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ve $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ yer vektörlerini çizelim.



$(0^\circ, 180^\circ)$ aralığında bulunan AOB açısına, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı denir. Açının ölçüsü θ ise, Öklid iç çarpımı

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta$ şeklinde yazılır.

Buradan $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ eşitliği ile bulunur.



Şekil 4.39



I. sıfırdan farklı $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin iç çarpımı, bu vektörlerin uzunlukları ve aralarındaki açının kosinüsü çarpımına eşittir.

II. İki vektör arasındaki açının kosinüsü, bu vektörlerin iç çarpımının, uzunlukları çarpımına bölünmesi ile bulunur.

ÖRNEK 37: $\vec{a} = (2\sqrt{3}, 2)$ ve $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ vektörleri veriliyor.

Bu vektörler arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM 37: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ ifadesinden

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{3} \cdot (1) + 2 \cdot (\sqrt{3})}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{12 + 4} \cdot \sqrt{1 + 3}}$$

$$\cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ise } \theta = 30^\circ \text{ olur.}$$

Sonuçlar: Düzlemde herhangi iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, bu vektörlerin arasındaki açının ölçüsü de θ olsun.

I. $\vec{a} // \vec{b}$ olsun. Bu durumda;

a. Vektörler aynı yönlü ise, $\theta = 0^\circ$ dir.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta$ ifadesinde, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos 0^\circ$ ve

$\cos 0^\circ = 1$ olduğundan, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ olur.

b. Vektörler ters (zıt) yönlü ise $\theta = 180^\circ$ dir.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos 180^\circ \text{ ve } \cos 180^\circ = -1 \text{ olduğundan, } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \text{ olur.}$$

II. $\vec{a} \perp \vec{b}$ olsun. Bu durumda $\theta = 90^\circ$ dir.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos 90^\circ \text{ ve } \cos 90^\circ = 0 \text{ olduğundan, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ olur.}$$

III. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörler arasındaki açı $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ olsun. Bu durumda,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta \text{ ifadesinden } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \text{ olur.}$$



İki vektör birbirine dik ise, iç çarpımları sıfırdır. Karşıt olarak, sıfır vektöründen farklı iki vektörün iç çarpımları sıfır ise, bu vektörler birbirine diktir.

ÖRNEK 38: $\vec{A} = (1, 2)$ ve $\vec{B} = (4, m-3)$ vektörleri birbirine dik ise, m nin değerini bulalım.

ÇÖZÜM 38: $\vec{A} \perp \vec{B}$ ise $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ olmalıdır.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot 4 + 2(m-3) = 0 \text{ dan, } 4 + 2m - 6 = 0 \text{ olduğundan, } m = 1 \text{ olur.}$$

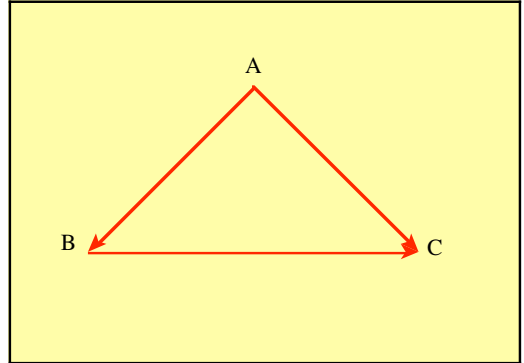
ÖRNEK 39: Şekil 4.40'daki, ABC dik üçgeninde

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2$$

olduğunu vektörlerle gösterelim.

ÇÖZÜM 39: İki vektörün toplam özelliğinden,

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} \text{ dir.}$$



Şekil 4.40

$$\text{Her iki tarafın kareleri alınırsa, } \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2$$

iç çarpım özelliğinden ve $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ olduğundan,

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + 2\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos 90^\circ$$

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + 2\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot 0$$

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \text{ veya } \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \text{ olur.}$$



17. SCHWARTZ (ŞIVARZ) EŞİTSİZLİĞİ

Her $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımı,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos \theta$ şeklinde yazılır. $|\cos \theta| \leq 1$ olduğundan,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} \text{ ifadesinden, } \frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} \leq 1 \text{ dır.}$$

Buradan $|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|$ olur.

Bu eşitsizliğe, **Schwartz eşitsizliği** adı verilir.

ÖRNEK 40: $\vec{A} = (2, 0)$ ve $\vec{B} = (3, 4)$ vektörleri için Schwartz eşitsizliğini sağladığını gösterelim.

ÇÖZÜM 40: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 6 + 0 = 6$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2 \text{ birimdir.} \quad \|\vec{B}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ birimdir.}$$

Bulduğumuz bu değerleri Schwartz eşitsizliğinde uygularsak,

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|$$

$$6 \leq 2 \cdot 5$$

$$6 \leq 10 \text{ olduğu görülür.}$$

18. GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ALANLARI

Vektörler yardımıyla bazı geometrik şekillerin alanlarını hesaplayabiliriz.

I. Paralelkenarın alanı

Köşelerinin koordinatları; $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ve $D(x_4, y_4)$ olan paralel kenarın alanını bulalım. (Şekil 4.41)

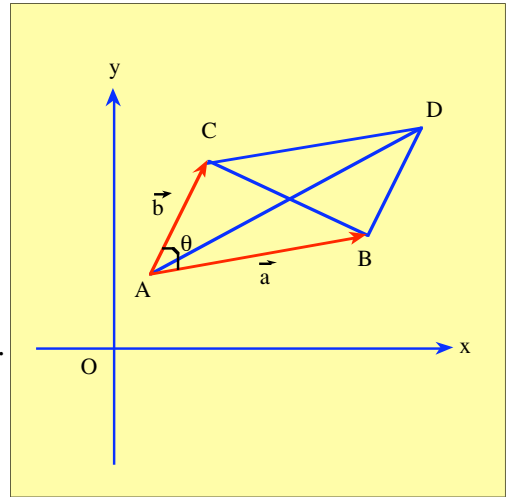
$\vec{AB}$ ile $\vec{AC}$ vektörleri arasındaki açı θ olsun.

$$\vec{AB} = \vec{a} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\vec{AC} = \vec{b} = \vec{OC} - \vec{OA} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1) \text{ dir.}$$

Vektörlerin iç çarpımından

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \text{ dir}$$



Şekil 4.41

ABC üçgenin alanına S dersek, $S = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \text{ olur.}$$

Bunları bileşenler cinsinden yazıp düzenlersek

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \text{ birim karedir.}$$

Buna göre, paralelkenarın alanı

$$A(ABCD) = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \text{ birim karedir.}$$

Paralelkenarın alanını bulmak için yalnız üç köşesinin bilinmesi yeterlidir.

ÖRNEK 41: Üç köşesinin koordinatları $A(-2, 0)$, $B(3, -1)$ ve $C(0, 2)$ olan paralelkenarın alanını bulalım.

ÇÖZÜM 41

Paralelkenarın alanı $= |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ ifadesinden,

$$\text{Paralelkenarın alanı} = |-2(-1 - 2) + 3(2 - 0) + 0(0 + 1)|;$$

$$\text{Paralelkenarın alanı} = |-2(-3) + 3(2) + 0(1)| = |6 + 6| = 12 \text{ birim karedir.}$$

II. Dikdörtgenin alanı: Dikdörtgenin açıları 90° olduğundan $\theta = 90^\circ$ dir.

$$\cos 90^\circ = 0 \text{ olduğundan } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Bu nedenle ABCD dikdörtgenin alanı} = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ birim karedir.}$$

III. Eşkenar dörtgen veya deltoidin alanı

Her iki dörtgenin de alanı köşegenlerinin çarpımının yarısına eşittir. $\vec{e}$ ve $\vec{f}$

eşkenar dörtgen veya deltoidin, köşegenlere ait vektörleri olmak üzere, eşkenar dörtgen veya deltoidin alanı $= \frac{1}{2} |\vec{e}| \cdot |\vec{f}|$ birim karedir.

ÖRNEK 42: Köşelerinin koordinatları $O(0, 0)$, $A(2, -5)$, $B(0, 4)$ ve $C(2, 4)$ olan deltoidin alanını bulalım. (Şekil 4.42) de,

ÇÖZÜM 42

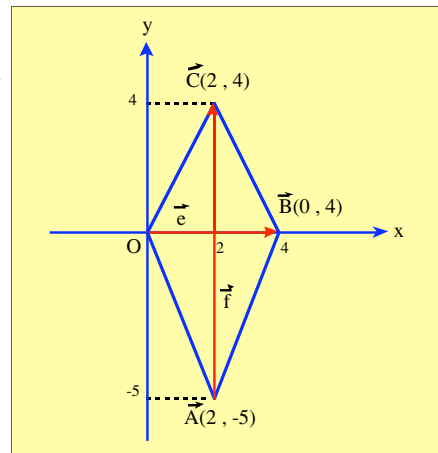
$$\vec{e} = \overrightarrow{OB} = (0 - 0, 4 - 0) = (0, 4) \text{ tür.}$$

$$\vec{f} = \overrightarrow{AC} = (2 - 2, 4 + 5) = (0, 9) \text{ dur.}$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ birimdir.}$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ birimdir.}$$

$$\text{Alan} = \frac{1}{2} |\vec{e}| \cdot |\vec{f}| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18 \text{ birim kare olur.}$$



Şekil 4.42

19. ÇEMBERİN VEKTÖREL DENKLEMİ

I. Merkezi ve yarıçapı verilen bir çemberin vektörel denklemi

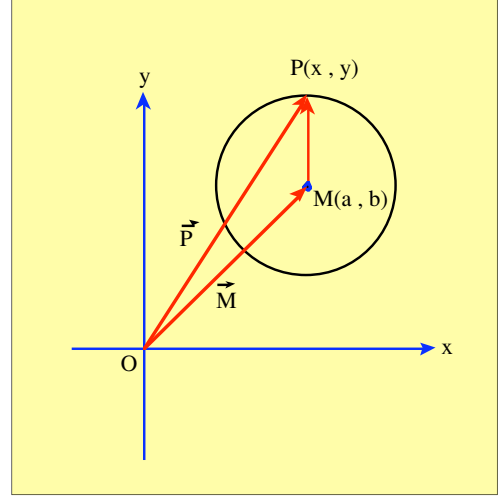
Düzlemde sabit bir $M(a, b)$ noktası ve yarıçap $r \in \mathbb{R}^+$ verilsin. Düzlemde herhangi bir nokta $P(x, y)$ olsun (Şekil 4.43)

Çemberin vektörel denklemi

$$\|\vec{MP}\| = \|\vec{P} - \vec{M}\| = r$$

$$\|\vec{P} - \vec{M}\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \text{ dir.}$$

Her iki tarafın karelerini alırsak,
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ Kartezyen denklemi elde edilir.



Şekil 4.43



M(a, b) merkezli, r yarıçaplı çember $\mathcal{C} = \{P(x, y) : \|\vec{MP}\| = r\} = \{P(x, y) : \|\vec{MP}\|^2 = r^2\}$ şeklinde noktalar kümesidir.

ÖRNEK 43: M(2, 3) merkezli, 5 birim yarıçaplı çemberin vektörel ve Kartezyen denklemlerini yazalım.

ÇÖZÜM 43: Çemberin vektörel denklemi $\|\vec{MP}\| = \|\vec{P} - \vec{M}\| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 5$ dir.

Bu çemberin Kartezyen denklemi: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ olur.

II. Merkezi ve bir noktası verilen çemberin vektörel denklemi

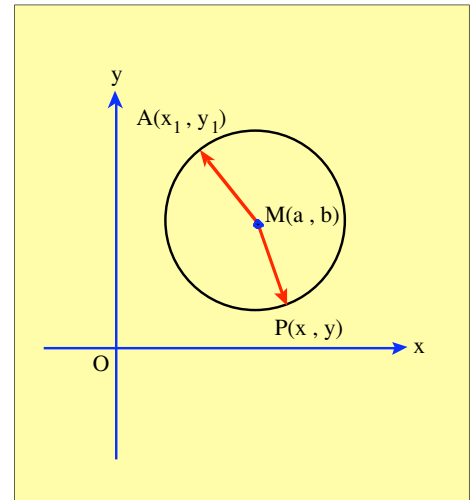
Çemberin merkezi $M(a, b)$ ve çemberin geçtiği nokta $A(x_1, y_1)$ olsun. (Şekil 4.44) de çemberin yarıçapı uzunluğu

$$r = \|\vec{MA}\| = \|\vec{A} - \vec{M}\|$$

$$r = \|\vec{MA}\| = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} \text{ birimdir.}$$

Çember üzerinde herhangi bir nokta $P(x, y)$ olsun. $\|\vec{MP}\| = r$ olur.

Buradan, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olarak bulunur. Buna çemberin Kartezyen denklemi denir.



Şekil 4.44

ÖRNEK 44

Merkez $M(3, 1)$ olan ve $A(-1, 4)$ noktasından geçen çemberin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM 44

Çemberin yarıçap uzunluğu, $r = MA = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

$$r = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ birimdir.}$$

İstenilen çemberin denklemi $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ olur.

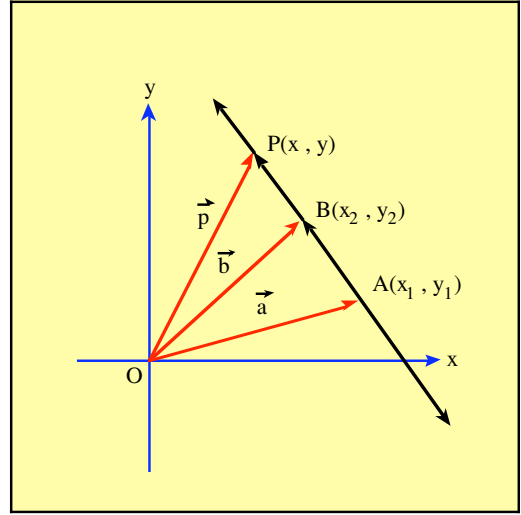
20. DOĞRUNUN VEKTÖREL DENKLEMİ**I. İki noktası verilen bir doğrunun vektörel denklemi**

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ gibi iki nokta ve AB doğrusu üzerinde herhangi bir nokta $P(x, y)$ olsun (Şekil 4.45) de:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \text{ ve } \vec{AP} = \vec{p} - \vec{a} \text{ dir.}$$

$$\vec{AP} = \lambda \vec{AB} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ dir.}$$

$\vec{AP} = \lambda (\vec{b} - \vec{a})$ olduğundan, P noktası AB doğrusu üzerindedir. Buna göre, A ve B noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemi: $\vec{p} = \vec{a} + \lambda (\vec{b} - \vec{a})$ dir.



Şekil 4.45

ÖRNEK 45: $A(2, 3)$ ve $B(4, -1)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemini bulalım.

ÇÖZÜM 45: A ve B noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemi

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda (\vec{b} - \vec{a}) ; (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ dir.}$$

$A(2, 3)$ ve $B(4, -1)$ olduğundan $\vec{b} - \vec{a} = (4, -1) - (2, 3) = (4 - 2, -1 - 3) = (2, -4)$ tür.

$$\vec{p} = (2, 3) + \lambda (2, -4) = (x, y) \text{ olur.}$$

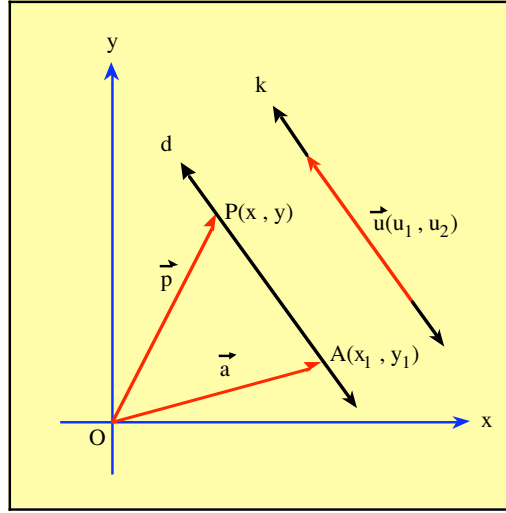
$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - 4\lambda \end{cases} \text{ Bu denklem sisteminde, } \lambda \text{ değerini yok edersek,}$$

$2\lambda = x - 2$ ise $-4\lambda = -2x + 4$ tür. $y = 3 - 4\lambda$ denkleminde uygularsak,
 $y = 3 - 2x + 4$ ten, $y = -2x + 7$ veya $2x + y - 7 = 0$ olur.

II. Verilen bir vektöre paralel olan ve verilen bir noktadan geçen doğrunun vektörel denklemi

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve verilen $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

k doğrusunun doğrultusu $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vektörüdür. (Şekil 4.46) da görüldüğü gibi, $\vec{AP} = \lambda \vec{u}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ise $d \parallel k$ dir. Doğrunun vektörel parametrik denklemi $\vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ olur.



Şekil 4.46

A noktasından geçen ve k doğrusuna paralel olan d doğrusunun denklemi,

$$d = \{P(x, y); \vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ noktalar kümesidir.}$$

ÖRNEK 46: $A(2, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (-3, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM 46: Doğru üzerinde herhangi bir nokta $P(x, y)$ olsun. $A(2, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (-3, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemi

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ dir.}$$

$$(x, y) = (2, 4) + \lambda(-3, 1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{array} \right\} \text{ Bu denklem sisteminde, } \lambda \text{ değerini yok edelim.}$$

$y = 4 + \lambda$ denklemden $\lambda = y - 4$ olur. Bunu $x = 2 - 3\lambda$ denklemde uygularsak

$x = 2 - 3(y - 4)$ olur. Bu denklemi sadeleştirirsek $x = 2 - 3y + 12$ den $x + 3y - 14 = 0$ olur.



ÖZET

* **Yönlü doğru parçası:** Başlangıç ve bitim noktası ile yönü belli olan doğru parçalarına yönlü doğru parçası denir. $\overrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir. Başlangıç ve bitim noktaları arasındaki uzaklığa **yönlü doğru parçasının** uzunluğu denir. $|\overrightarrow{AB}|$ sembolü ile gösterilir. Yönlü doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğruya **taşıyıcı doğru** denir.

* **Paralel yönlü doğru parçaları** Yönlü doğru parçalarının taşıyıcıları çakışık veya paralelse, paralel yönlü doğru parçaları denir.

* **Eş yönlü doğru parçaları:** Doğrultuları, yönleri, uzunlukları aynı olan doğru parçalarına, birbirine eş yönlü doğru parçaları denir.

* **Vektörler:** Düzlemdeki yönlü doğru parçalarının kümesinde tanımlı eşlik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıfların her birine vektör denir. Genel olarak vektörler $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{\vartheta}, \dots$ gibi gösterilir.

* **Sıfır vektörü :** Başlangıç ve bitim noktası aynı olan vektöre sıfır vektörü denir. $\vec{0} = \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ şeklinde gösterilir.

* **Ters vektörler :** Doğrultuları aynı yönleri ters olan vektörlere, ters (zıt) vektörler denir.

* **Bir vektörün normu:** Bir vektörün başlangıç noktası ile bitim noktası arasındaki uzaklığa vektörün normu (büyüklüğü, uzunluğu) denir. $|\overrightarrow{AB}| = \|\overrightarrow{AB}\|$ şeklinde gösterilir.

* Vektörler kümesinde işlemler

1. **Toplama işlemi:** $\vec{u}$ ve $\vec{\vartheta}$ vektörleri verilmiş olsun. $\vec{u} + \vec{\vartheta}$ vektörüne toplama işlemi denir. Vektörler kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

2. **Çıkarma işlemi:** $\vec{u}$ ve $\vec{\vartheta}$ vektörleri verilmiş olsun. $\vec{u}$ ve $\vec{\vartheta}$ farkına vektörlerde çıkarma işlemi denir.

3. **Bir reel sayı ile çarpma:** $\overrightarrow{AB}$ vektörü ile $k \in \mathbb{R}$ verilsin. $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$ şeklindeki işleme bir vektörü reel sayı ile çarpma işlemi denir. $\overrightarrow{CD}$ vektörü için;

$k > 0$ ise aynı doğrultuda ve aynı yöndedir.

$k < 0$ ise aynı doğrultuda ve ters yöndedir.

$k = 0$ ise, CD sıfır vektörüdür.

* **Yer vektörü:** Analitik düzlemde bulunan ve başlangıç noktası orjinde olan bir vektöre yer (konum) vektörü denir. Uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ ise, yer vektörü $\vec{OP} = \vec{P} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ dir.

* **İki vektörün eşitliği :** İki vektörün eşit olması için bunların birinci birleşenleri ile ikinci birleşenleri birbirine eşit olmalıdır.

* **Bir vektörün uzunluğu :** $\vec{A} = (x, y)$ yer vektörünün uzunluğu (normu) :

$$|\vec{OA}| = |\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ birimdir.}$$

* **İki vektörün paralelliği :** Düzlemde sıfırdan farklı $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri birbirine paralel ise $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$ dir. Paralel vektörler lineer bağımlı vektörlerdir. $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$ dir.

* **İki vektörün dikliği :** Düzlemde sıfırdan farklı $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri birbirine dik ise, $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ veya $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ dir.

* **Birim Vektörler:** Uzunluğu bir birim olan vektöre birim vektör denir.

* **Bir vektörü normlama:** $\vec{A}$ vektörü, uzunluğunun tersi ile çarpılırsa, bu işleme vektörü normlama denir. $\vec{A}_0 = \frac{1}{|\vec{A}|} \cdot \vec{A}$ vektörüdür.

* **Temel birim vektörü:** $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{e}_2 = (0, 1)$ birim vektörlerine temel (standart) birim vektörler denir.

* **Vektörlerde lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık:** $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birer vektör, a ve b reel sayılar olmak üzere, $a\vec{A} + b\vec{B} = 0$ eşitliği varsa vektörler lineer bağımlıdır. Paralel vektörler lineer bağımlıdır.

* **Vektörlerde iç çarpma işlemi:** $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri için $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ reel sayısına iç çarpma işlemi denir. $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ya da $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ şeklinde gösterilir.

* **İki vektör arasındaki açı:** Analitik düzlemde sıfırdan farklı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörler arasındaki açının cosinüs değeri,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \text{ eşitliği ile bulunur.}$$



ALİŞTIRMALAR

1. Analitik düzlemde, A (1 , -2) ve B (4 , 5) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ vektörünün yer (konum) vektörünü bulunuz.
2. A (3 5) , B (x , y) ve $\overrightarrow{AB} = (4 , 1)$ ise, B noktasının koordinatlarını bulunuz.
3. $\vec{A} = (2 , -1)$, $\vec{B} = (-3 , 4)$ ve $2\vec{A} + 3\vec{B} = \vec{C}$ ise, $\vec{C}$ vektörünü bulunuz.
4. A(1 , 5) ve B (-3 - 2) ise $\overrightarrow{AB}$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.
5. $\vec{A} = (3 , -6)$ vektörü veriliyor. $2\vec{A} + 3\vec{B} = \vec{0}$ ise $\vec{B}$ vektörünün bileşenlerini bulunuz.
6. $\vec{A} = (-2 , 4)$ ise $\vec{B} = \frac{3}{2}\vec{A}$ vektörünü analitik düzlemde çiziniz. Sonucu açıklayınız.
7. $\vec{A} = (2k , 3)$ vektörünün normu (boyu) 5 birim ise, k nin pozitif değerini bulunuz.
8. A (1 , -1) ve B (-2 , 3) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ vektörü ile aynı yönde olan birim vektörünü bulunuz.
9. $\vec{A} = (3 , -1)$ ve $\vec{B} = (2 , 1)$ vektörleri veriliyor. Bu vektörler arasındaki açının kaç derece olduğunu bulunuz.
10. $\vec{A} = (4 , 2)$ ve $\vec{B} = (2 , -4)$ vektörlerinin birbirine dik olup olmadığını gösteriniz.
11. A (1 , 2) , B (3 , 4) , C (3 , 2) ve D (4 , k) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ olduğuna göre, k sayısını bulunuz.
12. A (2 , 3) , B (1 , -2) ve C (3 , 1) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ olduğuna göre, D noktasının koordinatlarını bulunuz.
13. $\vec{A} = (1 , 3)$ ve $\vec{B} = (2 , 6)$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?
14. $\vec{A} = (2 , 4)$ ve $\vec{B} = (k , 3)$ dür. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 18$ olduğuna göre k nin değerini bulunuz.
15. $|\vec{A}| = 2$ birim $|\vec{B}| = 3$ birim ve $|\vec{A} + \vec{B}| = 5$ birim olduğuna göre, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ çarpımının değerini bulunuz.
16. $\vec{A} = (3 , 4)$ vektörünü standart taban vektörleri cinsinden yazınız.
17. $\vec{A} = (12 , 5)$ vektörünü (birim vektör) normlayınız. Normladığınız vektörün boyunu hesap ediniz.
18. $\vec{A} = (4 , -3)$ vektörüne paralel olan birim vektörü bulunuz.
19. A (1 , 1) , B (-2 , 3) , C (x , 2) ve D(1 , 3) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CD}$ vektörüne dik olması için x kaç olmalıdır?
20. Merkezi M (1 , 2) ve yarıçap uzunluğu 6 birim olan, çemberin denklemini yazınız.

21. Merkezi $M (3 , 1)$ olan ve $P (- 1 , 4)$ noktasından geçen çemberin denklemini bulunuz.
22. $A (2 , 1)$ noktasından geçen, $\vec{u} = (3 , 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini yazınız.
23. Eğim açısının ölçüsü 30° olan ve orijinden 5 birim uzakta bulunan doğrunun denklemini yazınız.
24. Köşelerinin koordinatları $A (- 4 , 6)$, $B (- 2, 8)$, $C(2 , 4)$ ve $D (0, 2)$ olan, ABCD dörtgeninin bir dikdörtgen olduğunu gösteriniz. Bu dikdörtgenin alanını bulunuz.
25. Köşelerinin koordinatları, $A (0, 1)$, $B (1 , - 2)$, $C (2 , 1)$ ve $D (1 , 4)$ olan, ABCD dörtgenin bir eşkenar dörtgen olduğunu gösteriniz. Bu eşkenar dörtgenin alanını bulunuz.



DEĞERLENDİRME TESTİ 4

1. A (3 , 2) , B (2 , 1) noktaları veriliyor. Buna göre, $\overrightarrow{AB}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?
 A) (1 , 1) B) (5 , 3) C) (-1 , -1) D) (4 , 3)
2. A (-3 , 7) ve B (2 , -5) noktaları veriliyor. Buna göre, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün uzunluğu kaç birimdir?
 A) 11 B) 12 C) 13 D) 14
3. $\vec{A} = (1 , -2)$, $\vec{B} = (-3 , 4)$ vektörleri veriliyor.
 $2\vec{A} + 3\vec{B}$ vektörünün bileşenleri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) (-7 , 8) B) (5 , -6) C) (-4 , 6) D) (-2 , 2)
4. $\vec{A} = (5 , -4)$, $\vec{B} = (x , y)$, $\vec{C} = (-2 , 3)$ vektörleri veriliyor.
 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ise, x + y nin değeri kaçtır?
 A) 0 B) 2 C) 5 D) 7
5. A (-1 , 1) ve B (3 , -2) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ ile aynı yönde olan birim vektörü aşağıdakilerden hangisidir?
 A) (4 , -3) B) $\left(\frac{4}{5} , -\frac{3}{5}\right)$ C) (3 , -4) D) $\left(\frac{3}{5} , -\frac{4}{5}\right)$
6. A (1, 2) , B (2, -3) ve C(2 , 5) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ olduğuna göre, D noktasının bileşenleri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) (3 , -4) B) (1 , -1) C) (-4 , 3) D) (3 , 4)
7. $\vec{A} = (5 , -1)$, $\vec{B} = (2 , 3)$ ve $\vec{C} = (1 , -7)$ vektörleri veriliyor.
 $m\vec{A} + n\vec{B} = \vec{C}$ olduğuna göre, m + n nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) -2 B) -1 C) 3 D) 5
8. $\vec{A} = (-3 , 7)$ ve $\vec{B} = (2 , 5)$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir?
 A) 30 B) 45 C) 60 D) 90
9. $\vec{A} = (m+1 , 2)$ ve $\vec{B} = (1 , 4)$ vektörleri birbirine dik ise, m kaçtır?
 A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

10. $\vec{A} = (2, -1)$ ve $\vec{B} = (m, n + 2)$ vektörleri lineer bağımlı ise, m ve n arasında nasıl bir bağıntı vardır?

- A) $m + 2n + 4 = 0$ B) $m - n + 1 = 0$
C) $2m + n - 2 = 0$ D) $2m + 4n - 1 = 0$

11. $\vec{A} = (2, 1)$ ve $\vec{B} = (m+1, m-2)$ vektörleri paralel ise m kaçtır?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

12. $(\vec{A} + \vec{B})(\vec{A} - \vec{B}) = 0$ ise, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arasında, aşağıdaki bağıntılardan hangisi vardır?

- A) $\vec{A} \perp \vec{B}$ B) $\vec{A} \parallel \vec{B}$ C) $\vec{A} = \vec{B}$ D) $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

13. Aşağıdaki kümelerden hangisi lineer bağımsızdır?

- A) $\{(1, -3), (-1, 3)\}$ B) $\{(2, 4), (4, 8)\}$
C) $\{(3, 2), (2, 3)\}$ D) $\{(1, 2), (3, 6)\}$

14. $\vec{A} = (8, 4)$ ve $\vec{B} = (2, n)$ vektörleri lineer bağımlı ise $|\vec{B}|$ kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$

15. Denklemi, $x - 2y + 3 = 0$ olan doğruya paralel olan vektör aşağıdakilerden hangisidir?

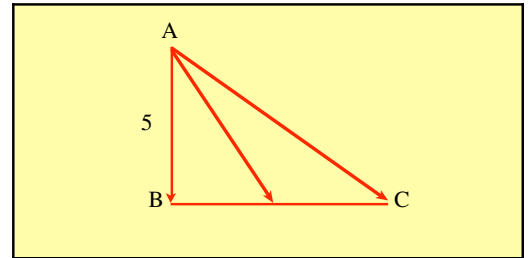
- A) $(1, -2)$ B) $(2, 1)$ C) $(1, 3)$ D) $(-2, 3)$

16. Denklemi, $x - 2y - 5 = 0$ olan doğruya dik olan vektör aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(1, 2)$ B) $(-2, 1)$ C) $(1, -2)$ D) $(3, 2)$

17. Şekilde $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ve $|\vec{AB}| = 5$ birim ise $\vec{AB}(\vec{AC} + \vec{AD})$ iç çarpımı kaçtır?

- A) 20 B) 30
C) 40 D) 50



18. $\|\vec{A}\| = 3$ birim, $\|\vec{B}\| = 6$ birimdir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açı 60° olduğuna göre $\vec{A} \cdot \vec{B}$ aşağıdakilerden hangisidir?
A) 6 B) 9 C) 12 D) 18
19. $\vec{A} = (2, 3)$ ve $\vec{B} = (3, 4)$ vektörleri veriliyor. Buna göre, $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?
A) -12 B) -10 C) -8 D) -7
20. $\vec{A} = (3, 1)$ vektörüne paralel olan ve $(-3, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $x + 3y + 6 = 0$ B) $x - 3y + 9 = 0$
C) $3x - y - 3 = 0$ D) $2x - 3y + 4 = 0$
21. Köşelerinin koordinatları $A(1, 3)$, $B(2, 4)$ ve $C(5, 0)$ olan ABC üçgenin alanı kaç birim karedir?
A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) 4 D) $\frac{9}{2}$
22. Merkezi $M(3, 1)$ ve yarıçapın uzunluğu $r = 4$ birim olan çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ B) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ D) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$
23. Merkezi $M(1, 3)$ olan ve $P(4, 5)$ noktasından geçen çemberin vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $\overrightarrow{MP}^2 = 7$ B) $\overrightarrow{MP}^2 = 11$ C) $\overrightarrow{MP}^2 = 13$ D) $\overrightarrow{MP}^2 = 17$
24. Köşelerinin koordinatları $A(0, 6)$, $B(2, 0)$, $C(11, 3)$ ve $D(9, 9)$ olan ABCD dikdörtgenin alanı kaç birim karedir?
A) 40 B) 50 C) 60 D) 70
25. Köşelerinin koordinatları $A(3, 4)$, $B(2, 2)$, $C(3, 0)$ ve $D(6, 2)$ olan deltoitin alanı kaç birim karedir?
A) 4 B) 8 C) 16 D) 32

